Välkomna till Reglerteknik Föreläsning 5

- Sammanfattning av föreläsning 4
- Frekvensanalys
- Bodediagram

LINKÖPINGS UNIVERSITET

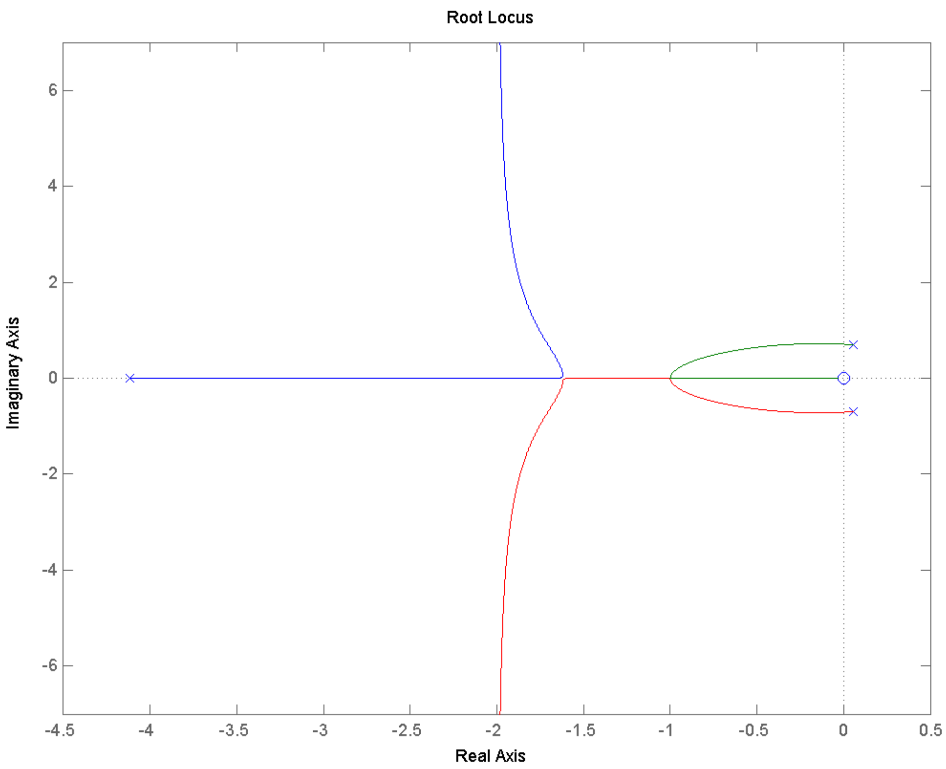
Sammanfattning av förra föreläsningen

Givet ett polpolynom med en varierande parameter, och dess karakteristiska ekvation

$$P(s)+KQ(s)=0$$

Vi kan illustrera polernas position som funktion av parametern K genom att rita en rotort

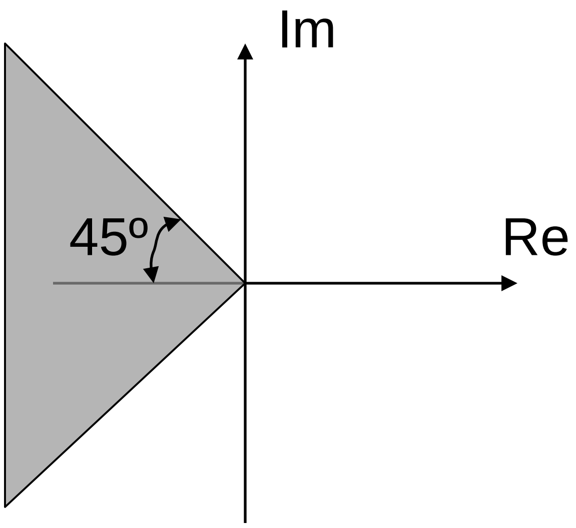
En approximativ rotort kan skissas genom att använda lite enkla regler



Sammanfattning av förra föreläsningen

Lösningstiden är ungefär 3/(avstånd till origo för poler närmast origo) för system med realla poler och oscillerande system med en bra relativ dämpning ξ (typiskt mellan 0.5 and 1)

En relativ dämpning ξ på 0.7 ger en översläng på runt 5%, vilket typiskt är vad man vill ha.

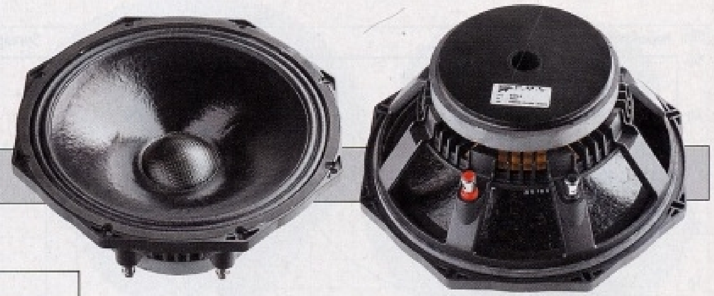


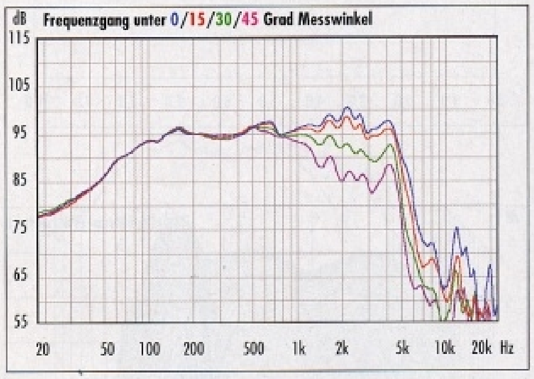
Nollställen är kul men svåra att analysera

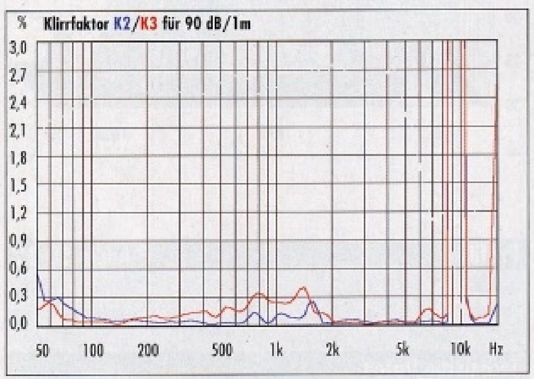
Frekvenssvar

Einzelchassis

PHL B30-4530



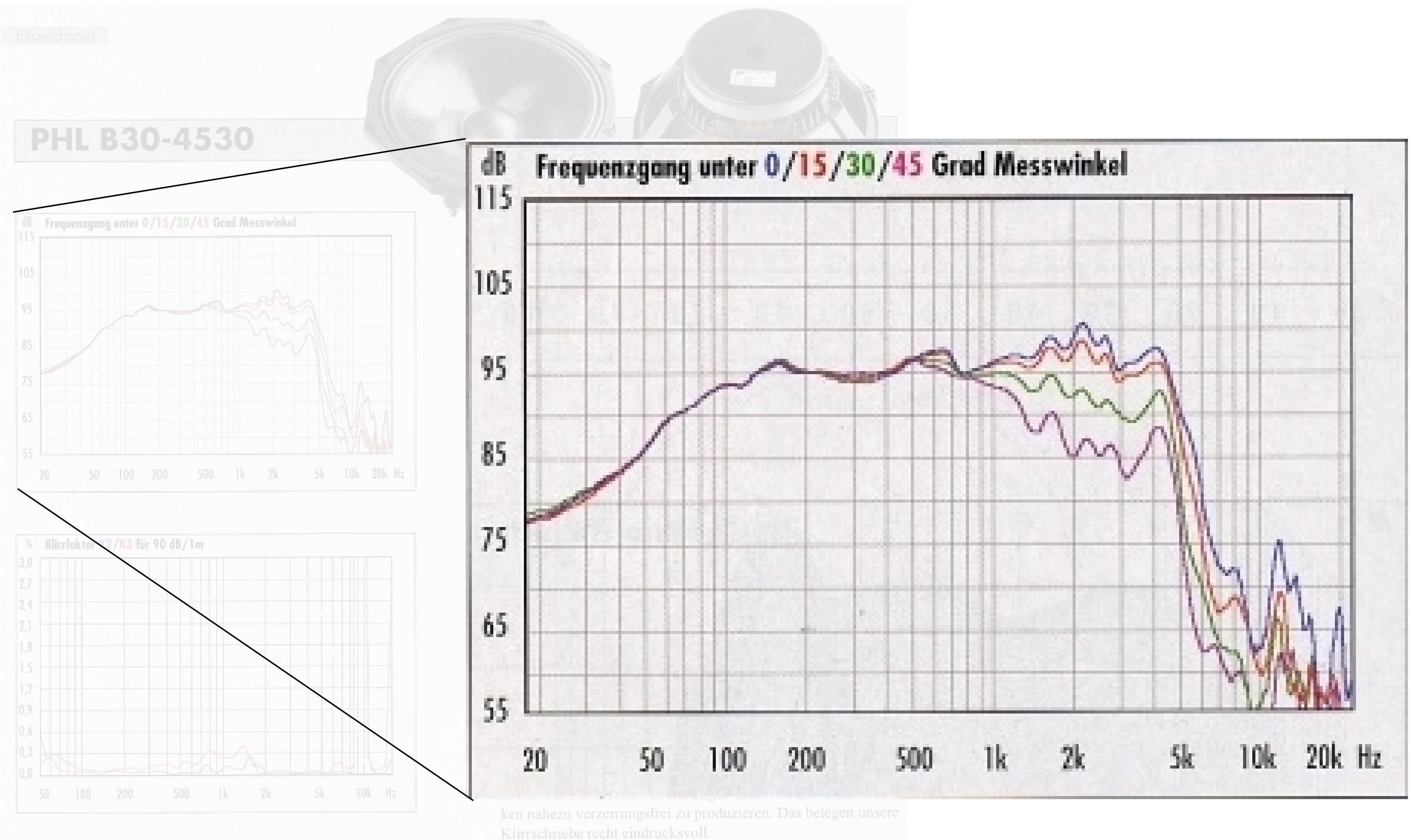




Der kleine aber feine Hersteller PHL produziert seit 1990 hochwertige Lautsprecherchassis, die einen hervorragenden Ruf genießen. Auch der B30-4530 macht bereits aus dem Stand einen entsprechenden Eindruck. Der stabile Gusskorb in der PHL-typischen Achteckform ist hervorragend belüftet. Das von PHL patentierte Kühlsystem sieht Öffnungen direkt über der Polplatte vor und sorgt damit für eine besonders effektive Wärmeabfuhr an diesem Bauteil, das ja einen erheblichen Teil der Abwärme der Schwingspule aufnimmt. Letztere ist im Format Zweieinhalbzoll gehalten und auf einen glasfaserverstärkten Träger aus dem Kunststoff Polyimid gewickelt. Durch die große Wickelhöhe von 20 mm berechnet sich der lineare Hub zu 6 mm – recht viel für ein solch wirkungsgradstarkes Chassis. Die Membran ist selbstverständlich aus Papier gefertigt, während man sich bei PHL bei der Dustcap für Kohlefaser entschieden hat. Eine beidseitige Membranbeschichtung mit dämpfendem Harz soll nicht nur die akustischen Eigenschaften optimieren, sondern schützt das Chassis vor Witterungseinflüssen. Da auch die Polplatten, etc. entsprechend behandelt sind, gibt PHL den B30-4530 für permanenten Freiluftbetrieb frei.

Die Messwerte sind durch die Bank in Ordnung. Wie viele seiner Mitbewerber zeigt auch der B30-4530 bei 700 Hz zwar einen Buckel im Frequenzgang, der jedoch nicht übertrieben negativ bewertet werden sollte. Denn bei einem Profilautsprecher sind Frequenzgangkorrekturen, z.B. durch Equalizing, keinesfalls verteufelt wie in manchen High-End-Kreisen, sondern gehören zum Alltag. Unser B30-4530 zeigt im Labor vor allem das, was Profis von ihm erwarten: die Fähigkeit, auch sehr hohe Lautstärken nahezu verzerrungsfrei zu produzieren. Das belegen unsere Klirrschriebe recht eindrucksvoll.

Frekvenssvar



Frekvenssvar

Högtalartest:

En testsignal (en sinusformad spänning) skickas till högtalaren

En mikrofon mäter ljudet och registrerar förstärkningen från spänningsstyrka till ljudvolym.

Typiska fenomen: Mätsignalen (ljudet) har samma frekvens (skulle låta väldigt illa annars) men förstärkningen beror på frekvensen

Frekvenssvar

Liknande experiment kan utföras på alla system med insignaler

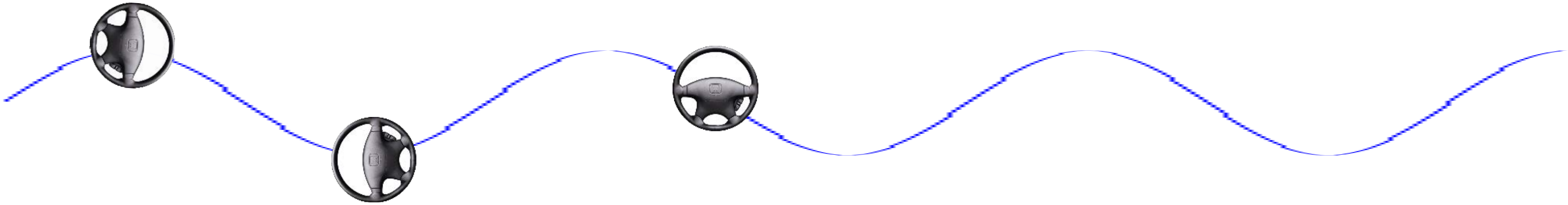
Bilslalom: Vi testar att röra ratten i en sinussignal, och registrerar bilens laterala position (avstånd från mittlinjen)

Bildynamiken (från rattutslag u(t) i radianer till lateral position y(t) i meter) kan approximativt beskrivas med följande linjära system

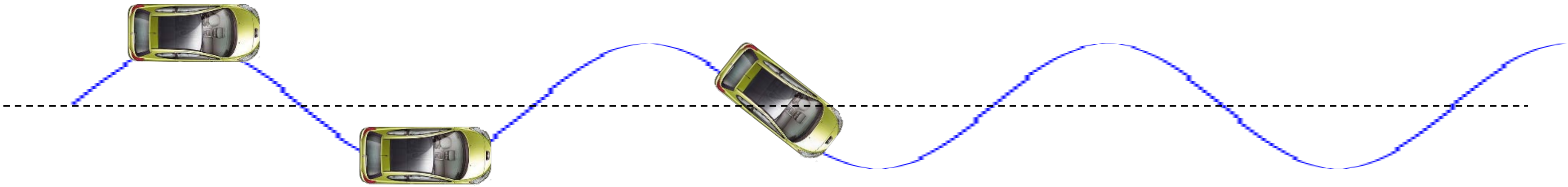
$$Y(s) = \frac{6}{s(0.005s+1)}U(s)$$

Frekvenssvar

Insignal: $u(t) = \frac{\pi}{2} sin(\pi t)$

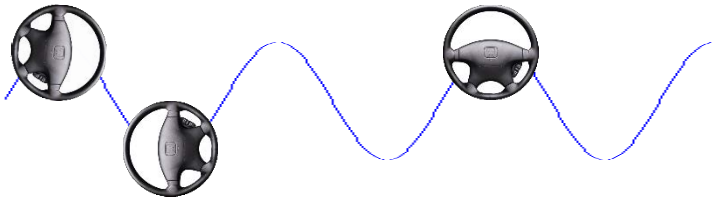


Utsignal: Sinussignal med en amplitud på ungefär 3 meter

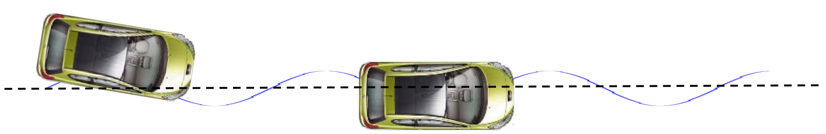


Frekvenssvar

Insignal: $u(t) = \frac{\pi}{2} sin(4\pi t)$

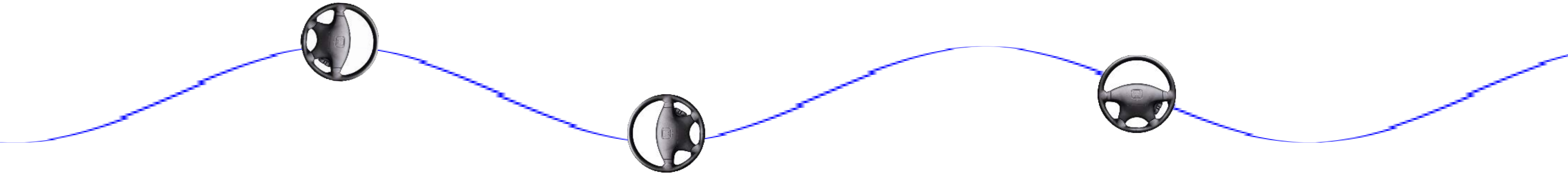


Utsignal: Sinussignal med en amplitud på ungefär 80 centimeter

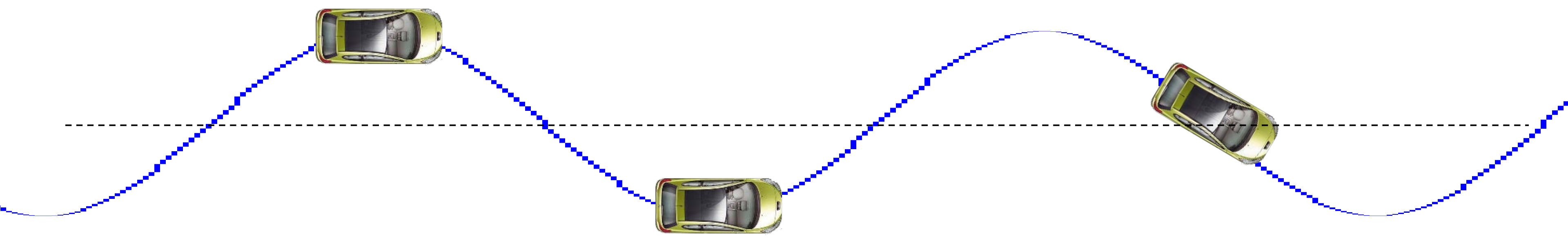


Frekvenssvar

Insignal: $u(t) = \frac{\pi}{2} sin(0.5\pi t)$



Utsignal: Sinussignal med en amplitud på ungefär 6 meter



Frekvenssvar

Experimentellt underbyggd tes: Sinussignal in ger en sinussignal ut (asymptotiskt efter att effekter av begynnelsetillståndet försvunnit)

Frekvenssvar

Linjära system beskrivs av differentialekvationer vars lösningar skapas via den homogena delen (som beror på begynnelsetillstånd) samt den partikulära delen som beror på insignalen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Antag nu att en sinussignal legat på systemet sedan t=-∞ Den homogena delen har då försvunnit vid t=0 och vi kan använda faltningsteoremet för Laplacetransformer (sid 30 i boken)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$G(s) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Frekvenssvar

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)sin(\omega(t-\tau))d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\mathrm{Im}\left(e^{i\omega(t-\tau)}\right)\ d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\mathrm{Im}\left(e^{i\omega(t-\tau)}\right)\ d\tau \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau e^{i\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(G(i\omega)e^{i\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(|G(i\omega)|e^{i(\omega t+\phi)}\right), \phi = \mathrm{arg}G(i\omega) \\
&= |G(i\omega)|sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
$$

En sinussignal med frekvens ω som skickas in i ett linjärt system G(s) förstärks med en faktor |G(iω)| och fasförskjuts arg(G(iω)) radianer

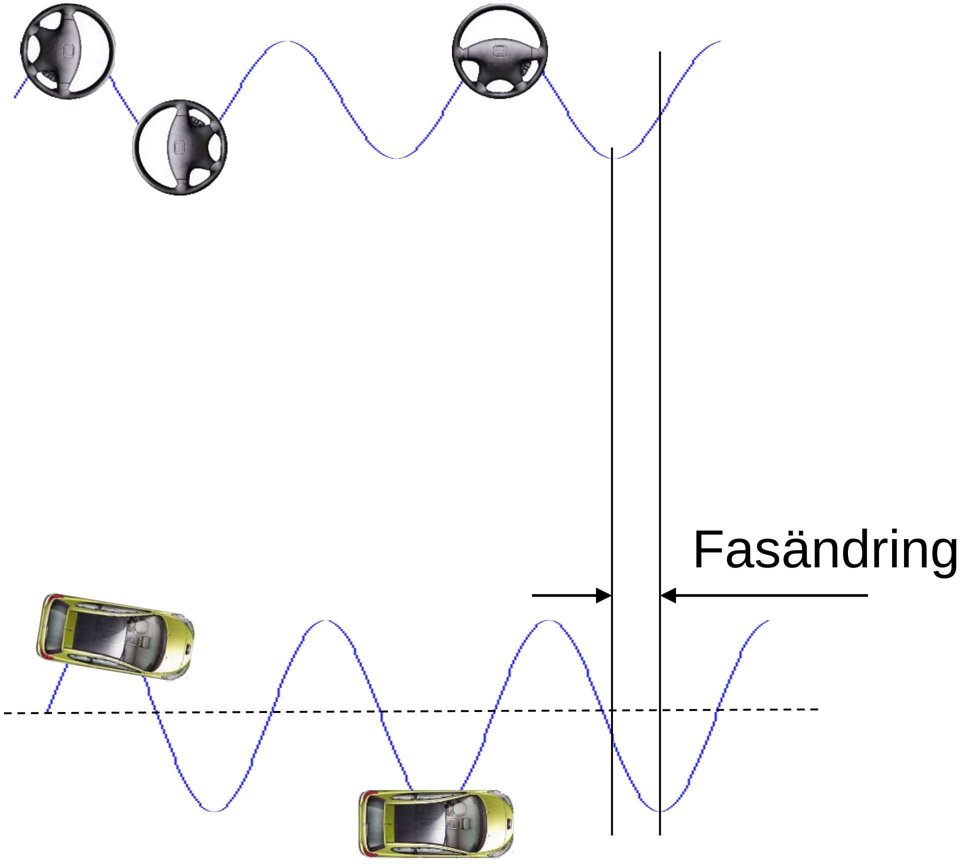
Frekvenssvar

Om vi använder denna formel får vi följande förstärkning och fasförskjutning för bildynamiken

$$|G(i\omega)| = \left|\frac{6}{i\omega(0.005i\omega+1)}\right| = \left|\frac{6}{-0.005\omega^2+i\omega}\right| = \frac{6}{\sqrt{(0.005\omega^2)^2+\omega^2}}$$

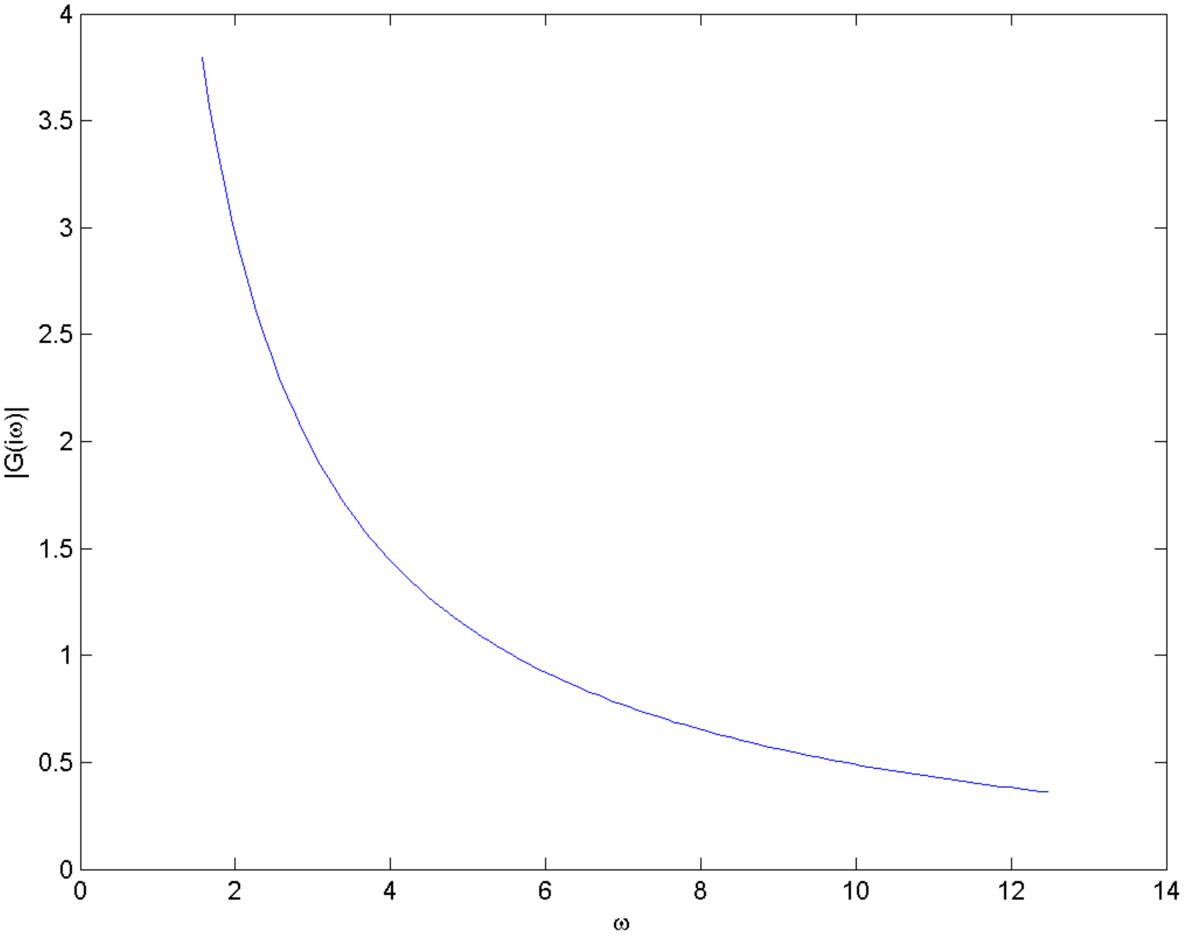
$$\begin{aligned}\arg(G(i\omega)) &= \arg\left(\frac{6}{i\omega(0.005i\omega+1)}\right)\\ &= -\arg(i\omega)-\arg(1+0.005i\omega)\\ &= -\pi/2-\arctan(0.005\omega)\end{aligned}$$

Frekvenssvar



Frekvenssvar

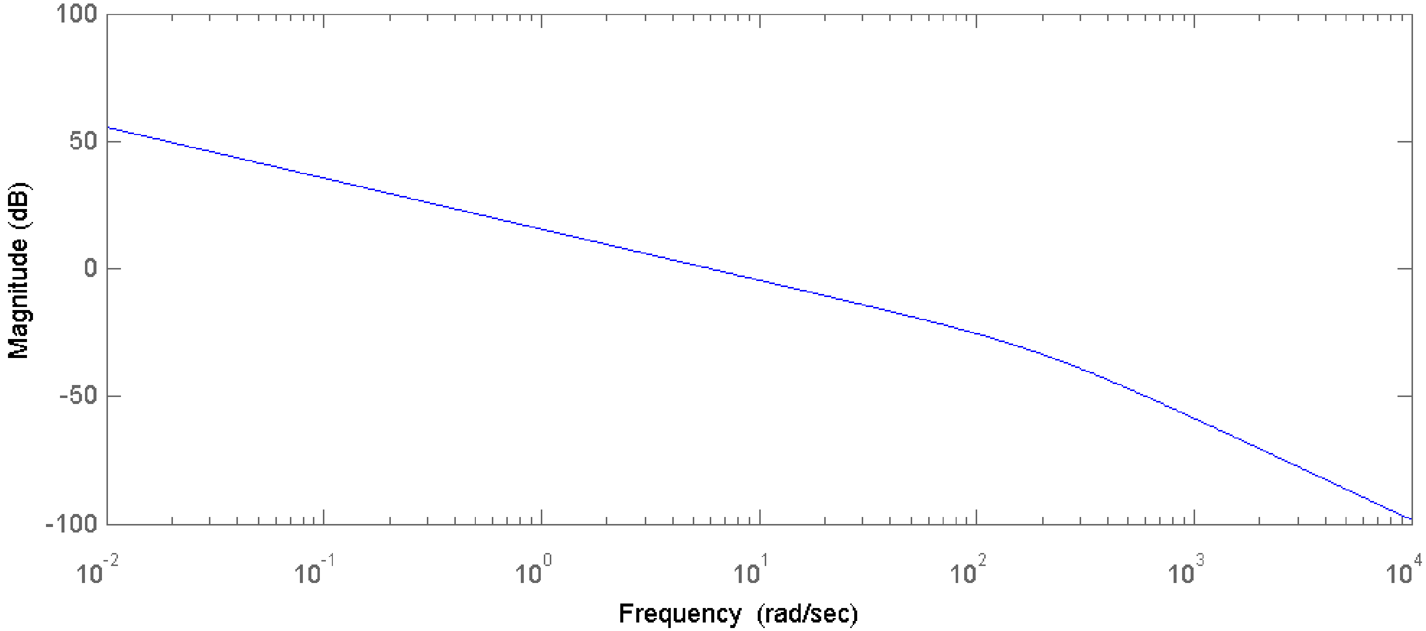
Bilens förstärkning från rattutslag till lateral position



Bodediagram

Amplitudförstärkningskurvor blir ofta ganska svårtolkade i linjär-linjär plot, istället ritar man amplitudkurvan i log-log skala. Vidare så multiplicerar man ofta förstärkningen med 20 för att erhålla en decibelskala

Dvs, vi plottar 20 log|G(iω)| med en logaritmiskt växande frekvens



Detta kallas för ett Bodediagram. Vi skall nu lära oss att *skissa* Bodediagram

Bodediagram

Antag att systemet är givet i följande faktoriserade form (dvs *n* poler, *p* integratorer och *m* nollställen enkelt synliga)

$$G(s) = K\frac{(1+\frac{s}{z_1})\ldots(1+\frac{s}{z_m})}{s^p(1+\frac{s}{p_1})\ldots(1+\frac{s}{p_n})}$$

$$\begin{aligned} z_1 &\leq\ < z_2 \cdots \leq z_m \\ p_1 &\leq\ < p_2 \cdots \leq p_n \end{aligned}$$

Amplitud och fas:

$$\begin{aligned} \log(|G(\imath\omega)|) &= \log(K) - p\log(\omega) + \sum_{i=1}^{m}\log(|1+\frac{i\omega}{z_i}|) - \sum_{i=1}^{n}\log(|1+\frac{i\omega}{p_i}|) \\ \arg G(i\omega) &= -p\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{m}\arctan(\frac{\omega}{z_i}) - \sum_{i=1}^{n}\arctan(\frac{\omega}{p_i}) \end{aligned}$$

Bodediagram

Skissmetod: Börja med väldigt små frekvenser.

$$\log(|G(i\omega)|) \approx \log(K) - p\log(\omega)$$

Denna funktion är linjär i log-log skala, med lutning –p (dvs den faller med p*20dB per decad, om vi konverterar till dB)

När vi ökar frekvensen kommer de andra termerna bli allt större, och till slut måste vi även ta hänsyn till dem.

När ω närmar sig ett nollställe eller en pol, måste även motsvarande term tas med, eftersom termer av typen $\log(|1+\frac{i\omega}{z_i}|)$ då blir signifikant stora

När en sådan term läggs till, byter amplitudkurvan riktning, och minskar antingen lutningen med en enhet (om en pol passeras) eller ökar riktningen med en enhet (om ett nollställe passeras)

Bodediagram

För små frekvenser även ungefär

$$\arg G(i\omega) \approx -p\frac{\pi}{2}$$

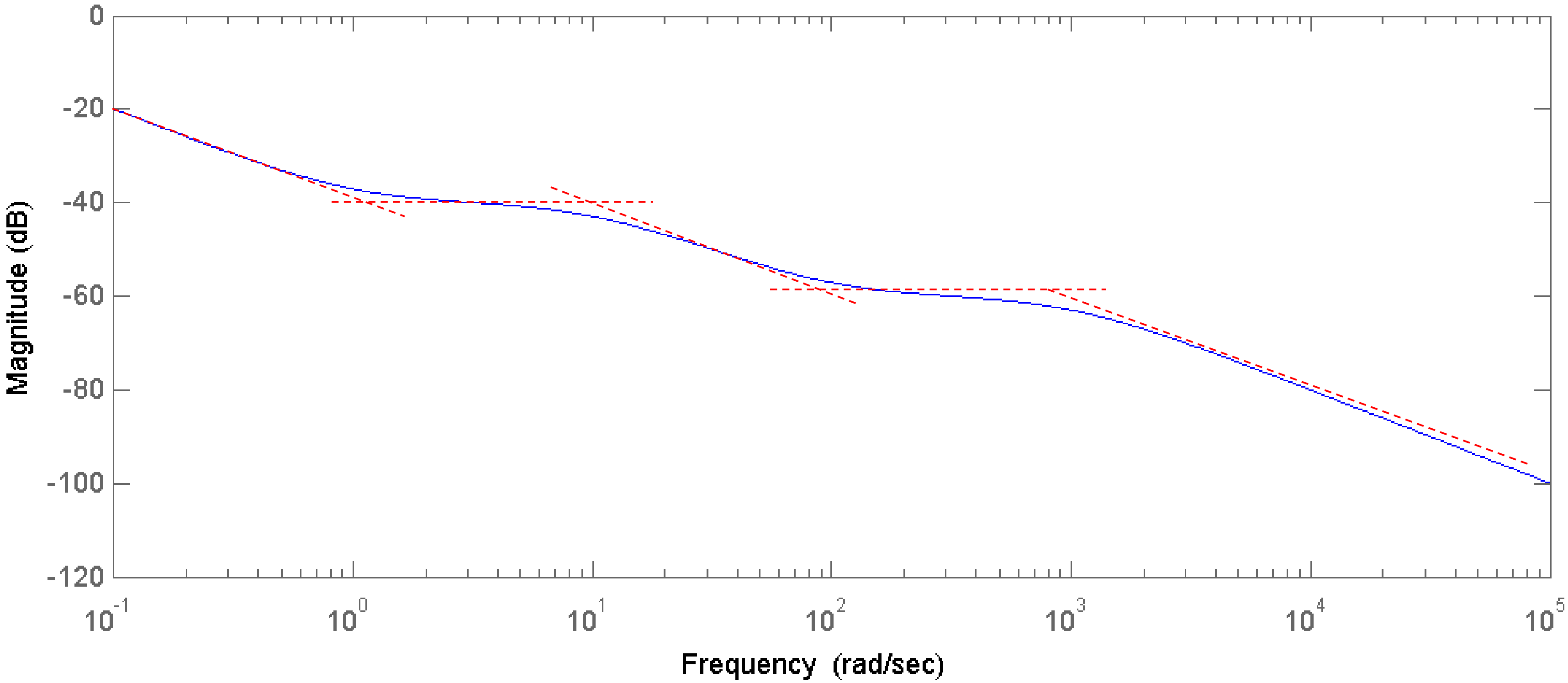
När vi ökar frekvensen kommer de andra termerna bli allt större även här

Ett stabilt nollställe ger en fasavancering på (asymptotiskt) $\frac{\pi}{2}$ radianer
och en stabil pol ger en fasförlust på (asymptotiskt) - $\frac{\pi}{2}$ radianer

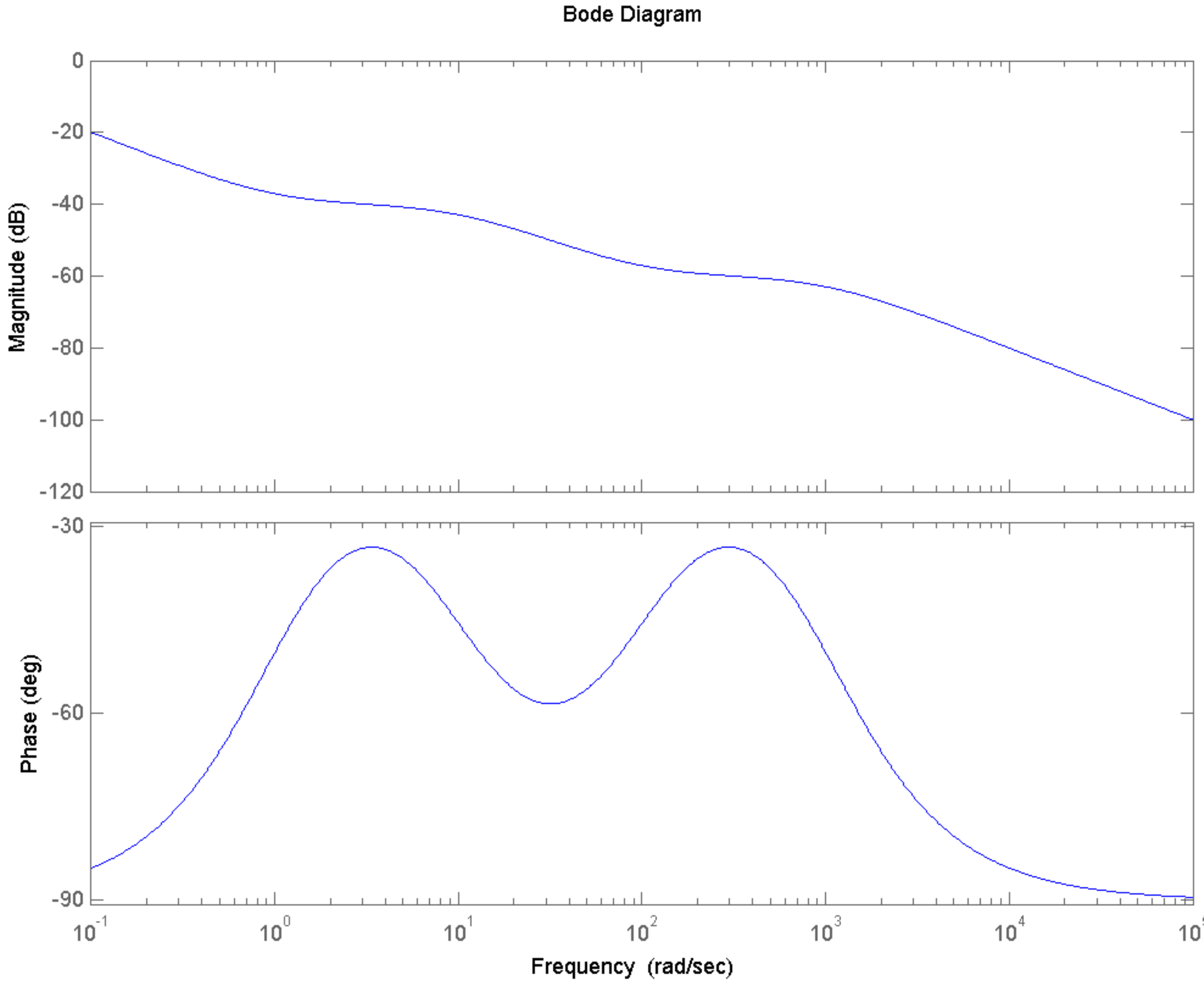
Faskurvan är typiskt svårare att rita manuellt

Bodediagram

$$G(s) = 0.01\frac{(1+\frac{s}{1})(1+\frac{s}{100})}{s(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{1000})}$$



Bodediagram



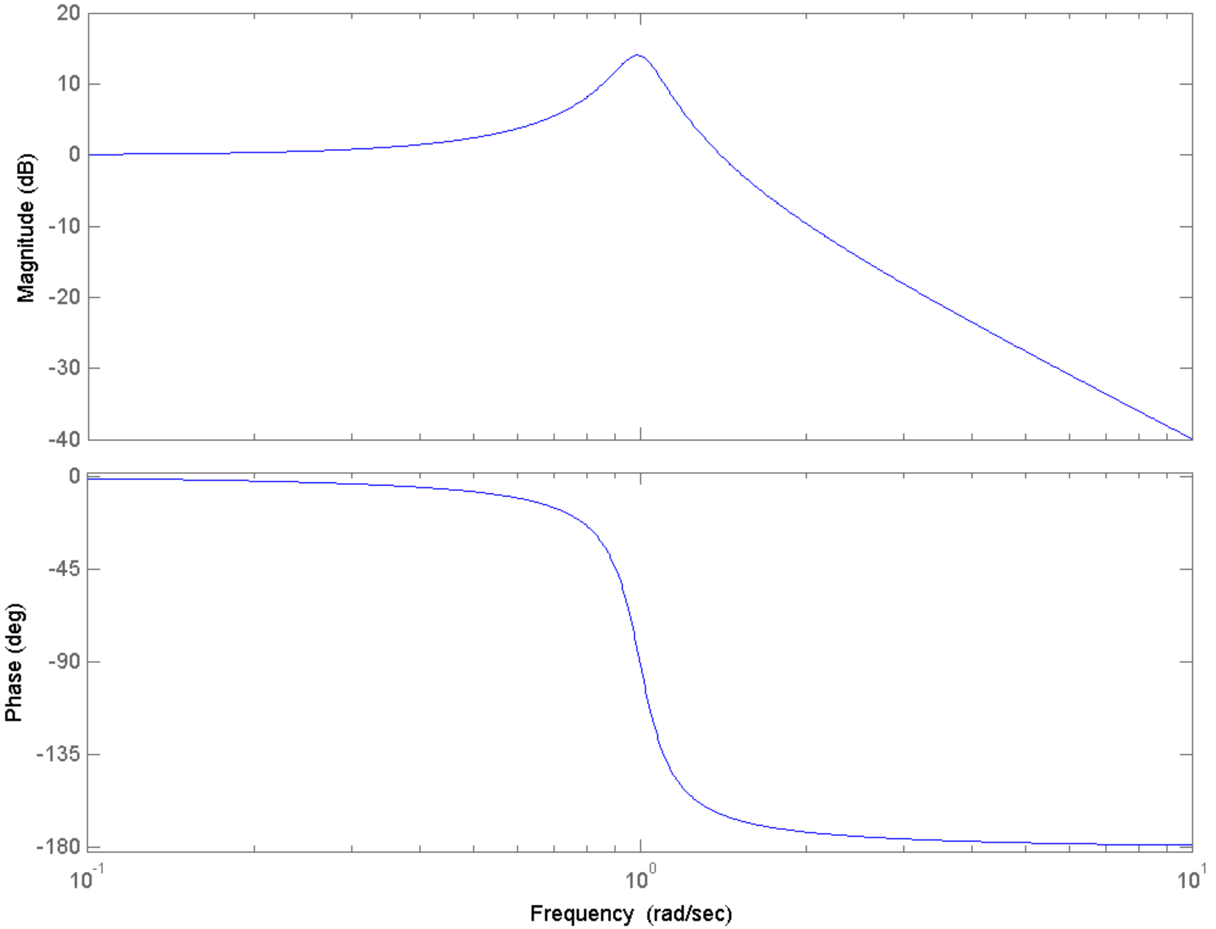
Bodediagram

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

Komplexa rötter är svårare att rita manuellt.

Vad som händer är att man får en resonansfrekvens, där insignaler förstärks extra mycket

Denna uppträder nära ω_0, och dess höjd beror på relativa dämpningen ξ



Periodiska signaler

”Varför är vi egentligen intresserade av frekvenssvar? Vi har ju kanske helt andra, mer generella, signaler i verkligheten”

Anledningen är att alla periodiska signaler med periodtid T kan skrivas som en summa av sinus- och cosinussignaler med vinkelfrekvenserna $n\omega_0$ där $\omega_0=(2\pi/T)$ och $n=0,1,2,\ldots$

Detta kallas en Fourierserie

Periodiska signaler

Exempel: Vi har ett linjärt system

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Som insignal använder vi en fyrkantsvåg med frekvensen ω_0.
Denna kan Fourierserieutvecklas

$$u(t) = b_1 sin(\omega_0 t) + b_3 sin(3\omega_0 t) + b_5 sin(5\omega t) + \ldots$$

Vi får som utsignal (asymptotiskt)

$$u(t) = |G(j\omega_0)| b_1 sin(\omega_0 t + \phi_1) + |G(j3\omega_0)| b_3 sin(3\omega_0 t + \phi_3) + \ldots$$

Om relativa dämpningen ξ är låg så kommer vi få en signifikant resonansfrekvens vid ω_0, vilket gör att $|G(j\omega_0)|$ blir stor. Således kommer första sinustermen att dominera utsignalen

Sammanfattning

Sammanfattning av dagens föreläsning

- Ett system kan analyseras och utvärderas efter hur det svara på en sinusformad insignal.

- Alla linjära system som drivs med en sinusformad insignal ger en sinusformad utsignal med samma frekvens, men med en annan amplitud och fas

- Ett diagram som visar denna amplitudförstärkning och fasförskjutning kallas ett Bodediagram

- Bodediagram ritas i log-log-skala då detta tydligare åskådliggör vissa egenskaper i amplitudkurvan

- En pol böjer amplitudkurvan nedåt i Bodediagrammet, medan ett nollställe böjer upp amplitudkurvan

Sammanfattning

Viktiga begrepp

Frekvenssvar: Utsignalen från ett system då insignalen är en sinussignal.

Bodediagram: Diagram som visar amplitudförstärkning och fasförskjutning av en sinussignal för ett linjärt system. Ritas oftast i log-log (för amplitudförstärkning) och log-linjär (för fas) skala

Resonansfrekvens: Frekvens för vilken insignaler förstärks extra mycket

Resonanstopp: Den "puckel" som syns i ett Bodediagram vid en resonansfrekvensen