Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 20 augusti 2021

1. Den aktuella överföringsfunktionen kan skrivas om enligt

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k}{Ts+1}$$

där

$$T = 1/a \quad k = b/a$$

Stegsvaret når 63% av slutvärdet efter 0.5 sekunder, vilket ger att $T = 0.5$ och därmed $a = 2$. Insignalens amplitud är tre, vilket ger att utsignalen går mot $3 \cdot k$ och enligt figuren fås $3 \cdot k = 7.5$, vilket ger $k = b/a = 2.5$ och eftersom $a = 2$ ger detta $b = 5$.

Svar: $a = 2, b = 5$

2. I figurerna C och D går utsignalen mot ett vilket svarar mot system med statisk förstärkning ett, dvs. I och IV. Stegsvaret i D har kortare stigtid vilket hör samman med I som har högre bandbredd. Detta ger alltså D - I och C - IV. På motsvarande sätt hör A samman med II, vilket ger kombinationerna A - II och B - III.

Svar: A - II, B - III, C - IV, D - I

3. Genom att jämföra med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

fås fallen

- $\omega_0 = 1, \zeta = 0.5$
- $\omega_0 = 1, \zeta = 1$
- $\omega_0 = 2, \zeta = 0.25$
- $\omega_0 = 2, \zeta = 1$
- $\omega_0 = 3, \zeta = 1$
- $\omega_0 = 3, \zeta = 1/6$

Svar: Fallet $\omega_0 = 3, \zeta = 1$ dvs. systemet $G(s) = \frac{9}{s^2+6s+9}$ har kortast stigtid och lägst översläng.

4. I detta fall är massans läge och massans hastighet, dvs. $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ lämpliga tillståndsvariabler. Med hjälp av dessa kan modellen skrivas på tillståndsform enligt

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -kx_1(t) - dx_2(t) + \alpha u(t)$$

Svar: $y(t), \dot{y}(t)$

5. I fall I och IV saknar regulatorn I-del, vilket kan leda till ett statiskt fel, vilket syns i figurerna A och B. Regulatorn i I har deriverande verkan vilket gör att stegsvaret blir bättre dämpat, vilken hör samman med B. Detta ger I - B och IV - A. Regulatorerna i II och III har integraldel vilket gör att utsignalen går mot ett i båda fallen, dvs. C och D. Fall III har större integraldel vilket ger ett mera oscillativt system, vilket hör samman med D. Detta ger III - D och II - C

   Svar: I - B, II - C, III - D, IV - A.

6. PI-regulatorns överföringsfunktion ges av

$$F(s) = K(\frac{T_i s + 1}{T_i s})$$

och med insatta uttryck för K och T_i fås

$$F(s) = \frac{1}{k\lambda}(\frac{Ts + 1}{s})$$

(a) överföringsfunktionen från referens- till utsignal ges av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

och med insatta uttryck för $F(s)$ och $G(s)$ fås

$$G_c(s) = \frac{\frac{1}{\lambda s}}{1 + \frac{1}{\lambda s}} = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

(b) Enligt a) ges överföringsfunktionen från referens- till utsignal av

$$G_c(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

dvs. den statiska förstärkningen är ett och tidskonstanten är λ. Ett litet värde på λ ger en liten tidskonstant och därmed ett snabbt återkopplat system.

(c) PI-regulatorn ges av ekvationen

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau)$$

Givet att referenssignalen ges av $r(t) = 1 \quad t \geq 0$ och att $y(0) = 0$ fås

$$u(0) = Kr(0) = \frac{T}{k\lambda} \cdot 1 = \frac{T}{k\lambda}$$

Ett litet värde på λ ger en stor initial styrsignal.

(d) Valet av λ är en avvgning mellan kravet på snabbheten för det återkopplade systemet och storleken på styrsignalen. Ett litet λ ger ett snabbt reglersystem med medför en stor styrsignal, och tvärtom.

7. (a) Tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ samt $x_2(t) = \dot{y}(t)$ ger tillståndsekvationerna

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

och

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{f}{J}\dot{y}(t) + \frac{1}{f}u(t) = -\frac{f}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

På matrisform fås

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f/J \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} u(t)$$

och

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) Med instatta värden $f = J = 1$ fås modellen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t)$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Med återkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

fås det återkopplade systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Det slutna systemets egenvärden fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda \cdot I - (A - BL)) = \lambda^2 + (1 + l_2)\lambda + l_1 = 0$$

Vi önskar placera polerna i $-\mu$, dvs. vi önskar ekvationen

$$0 = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \alpha^2$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger $l_2 = 2\mu - 1$ och $l_1 = \mu^2$.

återkopplingen ges alltså av:

$$u(t) = -(\mu^2 \quad 2\mu - 1)x(t) + r(t)$$

(c) Styrsignalen ges av:

$$u(t) = -Lx(t) - Ln(t) + r(t).$$

Det återkopplade systemet kan därmed skrivas:

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) - BLn(t) + Br(t)$$

vilket kan omvandlas till frekvensdomänen enligt:

$$Y(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B(R(s) - LN(s)).$$

Överföringsfunktionen från $N(s)$ till $Y(s)$ blir då:

$$\begin{aligned}
-C(sI - A + BL)^{-1}BL &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ \mu^2 & s + 2\mu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} LN(s) \\
&= \frac{-L}{s^2 + 2\mu s + \mu^2}
\end{aligned}$$

(d) Överföringsfunktionen från $N_1(s)$ till $Y(s)$ blir:

$$S(s) = \frac{-\mu^2}{s^2 + 2\mu s + \mu^2}.$$

Förstärkningen av störningen blir då:

$$\begin{aligned}
|S(1i)| = \frac{\mu^2}{|2\mu i + \mu^2 - 1|} = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\mu^2 + \mu^4 + 1}} &\leq 0.5 \implies \\
3\mu^4 - 2\mu^2 - 1 &\leq 0 \implies \\
\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)^2 &\leq \frac{4}{9} \overset{\mu \geq 0}{\implies} \\
\mu &\leq 1
\end{aligned}$$

Störningen i återkopplingen kommer alltså begränsa hur snabbt vi kan göra göra systemet.

8. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av nämnaren till överföringsfunktionen

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Med insattning av

$$G(s) = \frac{1}{s(2+1.5)} \quad F(s) = \frac{K_p s + K_I}{s}$$

och förenkling fås den karakteristiska ekvationen till

$$s^3 + 1.5s^2 + K_p s + K_I = 0$$

(b) Figuren visar att en pol startar i origo och går åt vänster utmed negativa realaxeln. Denna pol är alltid i vänster halvplan för $K_I > 0$. De två komplexkonjugerade polerna startar i vänster halvplan, men passerar imaginäraxeln och går ut i höger halvplan för $K_I = 1.5$. Det återkopplade systemet är alltså stabilt för $K_I < 1.5$.

(c) Den relativa dämpningen för de komplexa polerna är större än 0.7 när vinkeln mellan polernas lägen och den negativa realaxeln är mindre än 45° vilket gäller för $K_I < 0.2$.

(d) När den relativa dämpningen är 0.7 blir överslängen ca 5%, vilket fås ur uttrycket i Exempel 3.3 i boken. Enligt exemplet ges stigtiden av

$$T_r = \frac{1}{\omega_0} e^{\phi/tan(\phi)}$$

där i detta fall ω_0 (polernas avstånd till origo) är ca $1/\sqrt{2}$. Vidare är $\phi = \pi/4$ vilket ger $\tan\phi = 1$. Detta ger sammantaget $T_r \approx 3.1$.

9. Modellen ges av

$$G(s) = \frac{k}{sT+1}$$

och det verkliga systemet uttrycks allmänt

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

där $\Delta G(s)$ är det relativa modellfelet.

(a) När

$$G^0(s) = \frac{k(1+\Delta k)}{sT+1}$$

innebär detta att $\Delta G(s) = \Delta k$. Kravet i uppgiften innebär därmed att

$$\mid \Delta k \mid < 0.5$$

(b) När

$$G^0(s) = \frac{k}{s(T+\Delta T)+1}$$

fås

$$\Delta G(s) = \frac{-\Delta T s}{(T+\Delta T)s+1}$$

vilket ger

$$\mid \Delta G(i\omega) \mid = \frac{\Delta T \omega}{\sqrt{(T+\Delta T)^2\omega^2+1}}$$

Kravet i uppgiften innebär därmed kravet

$$\frac{\mid \Delta T \mid \omega}{\sqrt{(T+\Delta T)^2\omega^2+1}} < 0.5$$

Vänsterledet börjar i noll för $\omega = 0$ och växer sedan och går mot

$$\frac{\mid \Delta T \mid}{(T+\Delta T)}$$

Eftersom ΔT kan vara såväl positivt som negativt i detta fall ger det två fall.

$\Delta T > 0$:

$$\frac{\Delta T}{(T+\Delta T)} < 0.5$$

vilket ger

$$\Delta T < T$$

$\Delta T < 0$:

$$\frac{-\Delta T}{(T+\Delta T)} < 0.5$$

vilket ger

$$\Delta T > -T/3$$

Detta innebär att kravet är uppfyllt när

$$-T/3 < \Delta T < T$$

Svar: a) $\Delta k < 0.5$. b) $-T/3 < \Delta T < T$