Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 13 Juni 2016

1. (a) I figuren observerar vi att systemet är stabilt, att $y(t)$ svänger in mot slutvärdet 10 samt att $y(t)$ har nått 63 % av slutvärdet vid tidpunkten $t = 0.5s$. Se tabell A.3 i läroboken (s. 234) för Laplace-transformen. $u(t)$ är ett enhetssteg med amplituden fem, så

$$U(s) = \frac{5}{s}, \text{ och} \tag{1}$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{5}{s}. \tag{2}$$

Tidsfunktionen för utsignalen ges genom inverstransformering, $y(t) = 5k(1 - e^{-t/\tau})$. Genom slutvärdet kan k bestämmas till $k = 2$, och tidskonstanten τ är lika med t vid den tidpunkt då 63 % av slutvärdet har nåtts ($1 - e^{-1} = 0.63$), alltså $\tau = 0.5$.

(b) Ur figuren kan vi läsa ut periodtiden $T \approx 3.1$, dvs. $\omega = 2$. Då insignalen är en stationär sinus, $u(t) = \sin(\omega t)$, ges utsignalen av ett stabilt LTI system av $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi)$, $\phi = \arg G(i\omega)$, då transienta förlopp avklingat.

Vi kan också notera att utsignalens amplitud $A \approx 0.9$, samt att utsignalen når sitt maximum $\delta t \approx 0.6s$ efter insignalen. Med dessa observationer kan koefficienterna k och τ på nytt bestämmas, och jämföras med resultaten från uppgift 1a.

Fasförskjutningen ges av

$$\phi = \frac{-\delta t}{T} 2\pi = -1.2.$$

Vidare gäller att

$$|G(2i)| = \left| \frac{k}{2i\tau + 1} \right| = A, \tag{3}$$

$$\arg G(2i) = -\arctan(2\tau) = \phi. \tag{4}$$

Detta ger att $\tau = 1.29$ samt $k = 2.48$. Dessa resultat stämmer inte alls med resultaten från uppgift 1a, så parametrarna har ändrats.

(c) Överföringsfunktionen för ett system på tillståndsform ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Vi har

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

så

$$G(s) = \frac{3(s + 5/3)}{(s+1)(s+2)}.$$

Systemets poler är i $s = -1$, $s = -2$, och ett nollställe i $s = -5/3$.

(d) Laplacetransformering av differentialekvationen ger att motsvarande överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Systemet har alltså en pol i $s = 1$ och är instabilt. Vi kan då inte tala om någon stigtid eftersom det inte finns något begränsat slutvärde. Utsignalen kommer att växa obegränsat.

2. (a) Vi har

$$
\begin{aligned}
Y &= GU, \\
U &= F(R-Y), \\
\iff Y &= G_c R,\ G_c = \frac{FG}{1+FG}.
\end{aligned}
$$

Med G och F som definierade i uppgiften fås

$$
\begin{aligned}
G_c &= \frac{\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{10}{(5s+1)^2}}{1 + \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{10}{(5s+1)^2}} \\
&= \frac{10(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s(5s+1)^2 + 10(K_D s^2 + K_P s + K_I)}.
\end{aligned}
$$

Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation är nämnaren i G_c, med ordningen 3.

K_D, K_P och K_I ska nu väljas så att systemets poler (tre stycken) placeras i $s = -1$. Alltså,

$$
\begin{aligned}
& s(5s+1)^2 + 10(K_D s^2 + K_P s + K_I) = k(s+1)^3, \\
\iff & 25s^3 + (10 + 10K_D)s^2 + (1 + 10K_P)s + 10K_I = ks^3 + 3ks^2 + 3ks + k.
\end{aligned}
$$

Parametern k är en skalningsparameter för den eftersökta karakteristiska ekvationen. Parametrarna kan nu bestämmas genom att identifiera koefficienterna för varje gradtal på s:

$$
\begin{aligned}
& s^3 :\ 25 = k \\
& s^2 :\ 10 + 10K_D = 3k \\
& s :\ 1 + 10K_P = 3k \\
& \text{const.} :\ 10K_I = k
\end{aligned}
$$

Detta ger $K_D = 6.5$, $K_P = 7,4$ och $K_I = 2.5$ (samt $k = 25$).

(b)
- (i) - B: $G(s)$ har ingen integrator (pol i origo), så om inte regulatorn har någon integrerande verkan så kommer det slutna systemet att ha ett stationärt fel.
- (iv) - D, (ii) - A, (iii) - C: (iv) skiljer sig från (ii) genom den deriverande komponenten. Den kan alltså antas vara mindre oscillativ, men i övrigt ungefär lika snabb och utan stationärt fel. (ii) kan i sin tur väntas vara mindre oscillativ än (iii) som har en kraftigare integrerande verkan som lätt leder till överstyrning. I tur och ordning bör alltså (iv), (ii) och (iii) svara mot stegsvaren med ökande oscillationer, D, A och C.

3. (a) Amplitudkurvan ges av

$$
| G(i\omega) | = \left| \frac{2}{0.25i\omega + 1} \right| | e^{-0.2i\omega} | = \left| \frac{2}{0.25i\omega + 1} \right|
$$

d v s amplitudkurvan förändras ej av tidsfördröjningen.

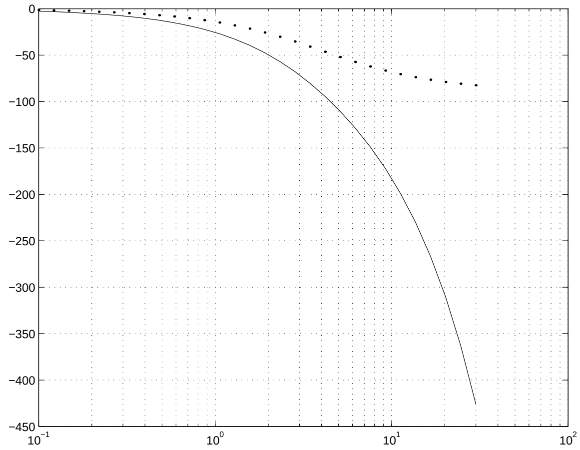
Utan tidsfördröjning är faskurvan

$$
\arg G(i\omega) = \arg \frac{2}{0.25i\omega + 1} = -\arctan(0.25\omega)
$$

Faskurvan visas i figuren nedan.

(b) Fasmarginal 55° innebär $\arg G(i\bar{\omega}_c) = -125°$ vid den önskade skärfrekvensen $\bar{\omega}_c$. Detta inträffar vid ca 6 rad/s. Vid denna frekvens är $| G(i\bar{\omega}_c) | \approx 1.1$, vilket innebär att K kan väljas som $K = 1/1.1 \approx 0.9$. Det stationära reglerfelet fås ur

$$
e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1}{1 + 0.9 \cdot 2} = 0.35
$$



Figur 1: Faskurva. Heldragen: Med tidsfördröjning. Prickad: Utan tidsfördröjning.

(c)

$$e_0 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+K\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\cdot 2}$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma+2K}.$$

För att uppnå $e_0 = 0$ måste vi välja $\gamma = 0$. Lag-länken sänker fasmarginalen ca $-6°$ vilket innebär att högsta möjliga skärfrekvens är vid den frekvens där $\arg G(i\omega) = -180° + 55° + 6° = -119°$. Detta inträffar för $\omega \approx 5.5 := \bar{\omega}_c$ rad/s. Välj därefter

$$\tau_I = 10/\bar{\omega}_c \approx 1.82$$

enligt tumregeln för att fasminskningen ska bli $< 6°$.

K bestäms så att denna önskade skärfrekvens uppnås

$$|F(i\bar{\omega}_c)G(i\bar{\omega}_c)| = 1,$$
$$\iff K\left|\frac{\tau_I i\bar{\omega}_c+1}{\tau_I i\bar{\omega}_c+\gamma}\right| |G(\bar{\omega}_c)| = 1$$

Med approximationen $|\frac{\tau_I i\bar{\omega}_c+1}{\tau_I i\bar{\omega}_c+\gamma}| \approx 1$ och avläsningen $|G(\bar{\omega}_c)| \approx 1.2$ får vi $K = 0.83$. Sammantaget ger det regulatorn

$$F(s) = 0.83 \cdot \frac{1.82s+1}{1.82s}.$$

4. (a) Känslighetsfunktionen, eller överföringsfunktionen från V till Y ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s) = G(s)F(s)(R(s) - Y(s)) + V(s)$$
$$\iff Y(s)(1 + G(s)F(s)) = G(s)F(s)R(s) + V(s)$$
$$\iff Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot R(s) + \frac{1}{1+G(s)F(s)} \cdot V(s).$$

Känslighetsfunktionen ges alltså av $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}$.

Då $r(t) = 0$ och $v(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = 2$ (stationär sinus) ges förstärkningen till utsignalen av $|S(i\omega)|$ enligt sinus in - sinus ut sambandet och givet att $S(s)$ är stabil. Ur diagramet kan vi läsa ut att $|S(2i)| \approx 6\text{dB} > 0\text{dB}$, alltså en förstärkning.

(b) Den komplementära känslighetsfunktionen ges av $T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$ $(= G_c(s))$. Robusthetskriteriet säger att $G^0(s)$ återkopplat med $F(s)$ är stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \; (= |i\omega/10 + 1| \text{ här}).$$

Detta kan undersökas grafiskt med hjälp av Bode-diagrammet för $T(i\omega)$. $|i\omega/10+1| \approx 1$ (= 0 dB) för frekvenser $\omega < 10$, och $|i\omega/10+1| \approx \omega/10$ för $\omega > 10$. Speciellt så kan man se att $|T(i\omega)|$ har en topp vid $\omega = 1.5$, $T(1.5i)$ är tydligt > 1. För denna frekvens uppfylls alltså inte robusthetskriteriet. Vi kan alltså inte garantera att det återkopplade systemet är stabilt med regulatorn $F(s)$.

(c) Med en tillståndsåterkoppling $L = (l_1 \;\; l_2)$ blir ges den karakteristiska ekvationen för det återkopplade systemet av

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 + l_1 & -3 + l_2 \\ 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det slutna systemet kommer därför att ha den karakteristiska ekvationen $(\lambda - 1 + l_1)(\lambda + 4) = 0$. Väljer vi $l_1 = 2$ hamnar det slutna systemets poler i -4 och -1, som efterfrågat. Däremot kan inte båda polerna placeras godtyckligt. Det framgår av den karakteristiska ekvationen att en pol nödvändigt hamnar i -4 oavsett val av återkoppling.

Detta resultat kan man också se genom att studera styrbarhetsmatrisen: Polerna kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart. Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen, S, har full rang (Resultat 8.5 i boken).

$$S = (B \; AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S har uppenbarligen ej full rang.

5. (a) Alla poler ligger i vänster halvplan då $55 < K < 85$, då är systemet stabilt.

(b) Samtliga poler är reella då $0 < K < 2$.

(c) Att alla poler har större belopp på realdelen än på imaginärdelen gäller för $K < 28$. Att alla poler ligger i vänster halvplan gäller för $55 < K < 85$. Bägge kraven uppfylls alltså inte för något K.

(d) Överföringsfunktionen $G(s)$ kan skrivas $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Då blir det slutna systemets överföringsfunktion

$$G_c(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)},$$

med den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} A(s) + KB(s) = 0, \\ \iff K = -A(s)/B(s). \end{aligned}$$

Nollställena till $A(s)$ är rotortens startpunkter ($K = 0$). Det finns 5 st startpunkter. Nollställena till $B(s)$ är rotortens ändpunkter ($K \to \infty$), det finns två stycken ändpunkter. Alltså är gradtalet för $G(s)$ täljare 2 och nämnare 5.

(e) ∞ ty rampfelet ges av (sidan 62 i kursboken)

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + KG(s)}$$

och $|KG(0)| < \infty$ (inga startpunkter i origo).