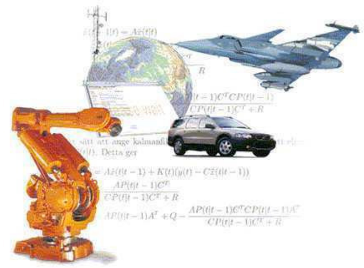
TTIT62: Föreläsning 9



Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

Tidsdiskreta system (forts.)

Repetition: Tidsdiskreta system

- **Differensekvationer**

$$y(kT) + 0.9y(kT - T) = 2u(kT) + 0.4u(kT - T)$$

- **Överföringsfunktioner** (z-transform)

$$H(z) = \frac{2 + 0.4z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}} = \frac{2z + 0.4}{z + 0.9}$$

Repetition: Sampling

- **Samplingsteoremet:** En tidskontinuerlig signal med högsta frekvens ω_0 kan rekonstrueras från samplade värden om $\omega_0 \leq \frac{\omega_S}{2}$.
- Transformation av en överföringsfunktion m.h.a. **Tustins formel**:

$$\text{Ersätt } s \text{ med } \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

- **Exakt sampling** när insignalen är styckvis konstant (eng. zero order hold):

$$G_T(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right)_{t=kT}\right\}$$

- Reglerteknisk tumregel: $\omega_S \approx 20\omega_{B,desired}$

Stabilitet

Ett system är **insignal-utsignalstabilt** om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal.

Ett tidsdiskret system med överföringsfunktion $H(z)$ är insignal-utsignalstabilt om och endast om alla **poler** till $H(z)$ har ett avstånd till origo som är mindre än ett, d.v.s. om de ligger innanför enhetscirkeln.

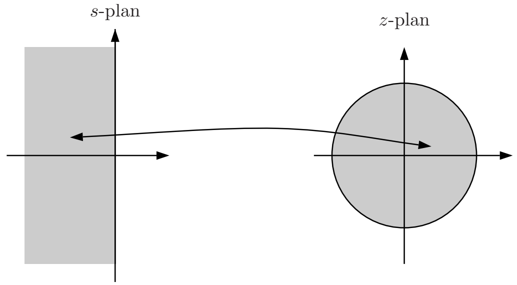
(Enhetscirkeln $= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$)

Tustins formel

Tustins formel (bilinjär transformation)

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

avbildar vänster halvplan (VHP) på hela det inre av enhetscirkeln ($\Rightarrow$ stabiliteten bevaras):



Exakt sampling

- Vid exakt sampling avbildas det kontinuerliga systemets poler λ_i på $e^{\lambda_i T}$.
- En godtycklig pol i VHP, $\lambda_i = \mu_i + i\sigma_i$, med $\mu_i < 0$, avbildas alltså på $\delta_i = e^{\mu_i T}(\cos(\sigma_i T) + i\sin(\sigma_i T))$, med $|\delta_i| = e^{\mu_i T} < 1$.
- Slutsats: VHP avbildas på det inre av enhetscirkeln $\Rightarrow$ Stabiliteten bevaras.

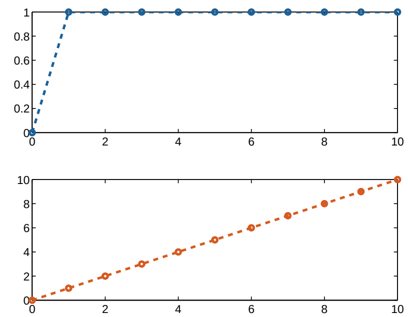
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett första ordningens system

$$\frac{1}{z-1}$$

med en pol i 1.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



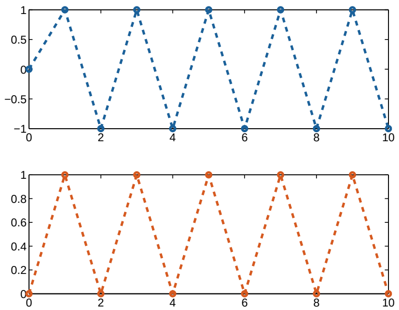
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett första ordningens system

$$\frac{1}{z+1}$$

med en pol i -1.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



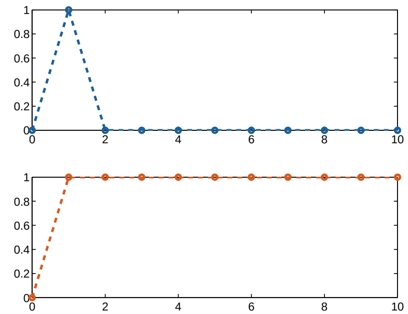
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett första ordningens system

$$\frac{1}{z}$$

med en pol i 0.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



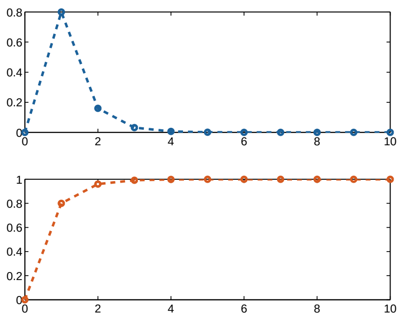
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett första ordningens system

$$\frac{1-a}{z-a}$$

med en pol i $z = a = 0.2$.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



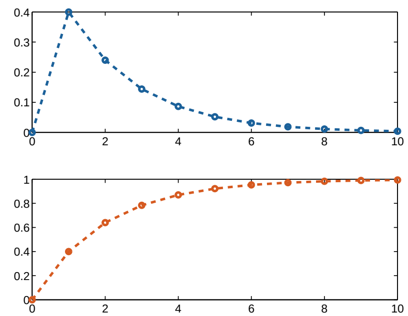
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett första ordningens system

$$\frac{1-a}{z-a}$$

med en pol i $z = a = 0.6$.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



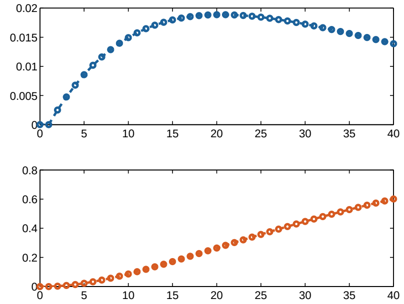
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett andra ordningens system

$$\frac{1 - 2r\cos(\gamma) + r^2}{z^2 - 2r\cos(\gamma)z + r^2}$$

med poler i $z = re^{\pm i\gamma} = 0.95$.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



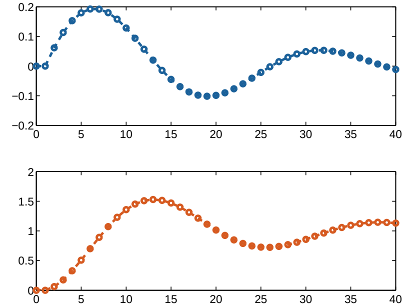
Poler, impulssvar och stegsvar

Ett andra ordningens system

$$\frac{1 - 2r\cos(\gamma) + r^2}{z^2 - 2r\cos(\gamma)z + r^2}$$

med poler i $z = re^{\pm i\gamma} = 0.95e^{\pm i0.25}$.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):



Poler, impulssvar och stegsvar

Ett andra ordningens system

$$\frac{1 - 2r\cos(\gamma) + r^2}{z^2 - 2r\cos(\gamma)z + r^2}$$

med poler i $z = re^{\pm i\gamma} = 0.95e^{\pm i0.65}$.

Impulssvar (överst) och stegsvar (nederst):