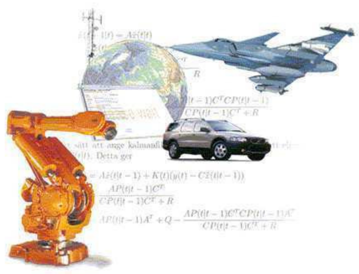
TTIT62: Föreläsning 3



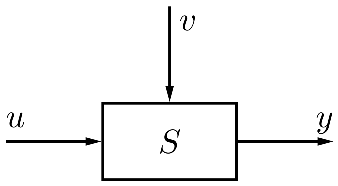
Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

Överföringsfunktioner, poler och stegsvar

Repetition: Reglerproblemet

Välj **styrsignalen** $u(t)$ så att **systemet** S (enligt **mätsignalen** $y(t)$) beter sig som önskat (**referenssignalen** $r(t)$) trots inverkan av **störningar** $v(t)$.



Repetition: Öppen styrning & återkoppling

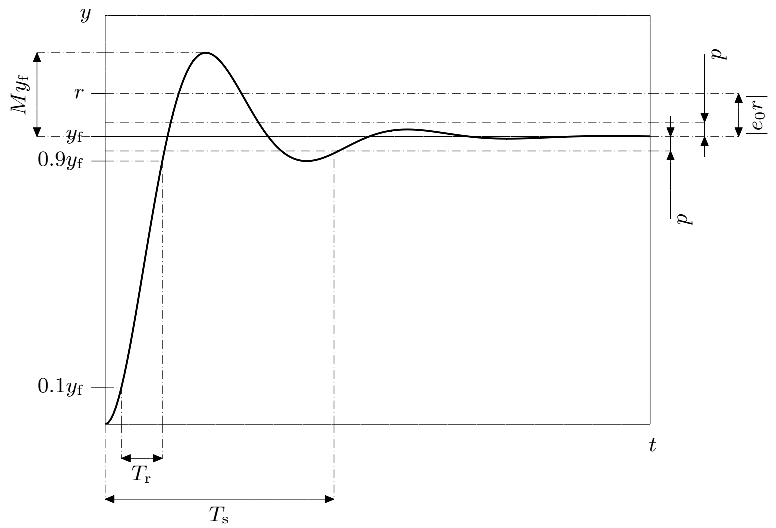
Öppen styrning (styrning utan hjälp av mätningar):

- Är känslig för störningar och modellfel.

Återkoppling:

- Kan göra ett system snabbare eller långsammare.
- Kan göra ett system mindre oscillativt.
- Kan minska inverkan av modellfel och störningar.
- Kan leda till instabilitet om man väljer en olämplig regulator.

Repetition: Stegsvarsspecifikationer



Laplacetransformen

Ett alternativ till att arbeta direkt med differentialekvationer är att använda **laplacetransformen**:

$$\boxed{Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt}$$

$(s = \sigma + i\omega)$

Fördel: Underlättar många beräkningar som t.ex. derivering, integrering och faltning.

Laplacetransformen...

Några egenskaper:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$
$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$$
$$\mathcal{L}\{f(t-L)\} = e^{-sL}F(s)$$
$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\} = F(s)G(s)$$

Slutvärdesteoremet (om $f(t)$ konvergerar):

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Överföringsfunktion

Betrakta en differentialekvation

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0\frac{d^m}{dt^m}u(t) + \ldots + b_m u(t)$$

Laplacetransformering ger (om alla initialvillkor är noll)

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

är systemets **överföringsfunktion**.

Poler och nollställen

Överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Systemets **poler**: Rötterna till $A(s) = 0$

Systemets **nollställen**: Rötterna till $B(s) = 0$

Stabilitet

Ett system är **insignal-utsignalstabilt** om en begränsad insignal ger en begränsad utsignal.

Ett system med **proper** överföringsfunktion $G(s)$ är insignal-utsignalstabilt om och endast om alla **poler** till $G(s)$ har **strikt negativa realdelar**.

(proper = nämnarpolynomets gradtal $\geq$ täljarpolynomets gradtal)

Exempel: Farthållare i en bil

Modellen av en bil från föreläsning 1 och 2:

$$m\dot{y}(t) = u(t) - \alpha y(t) - v(t)$$

Här är

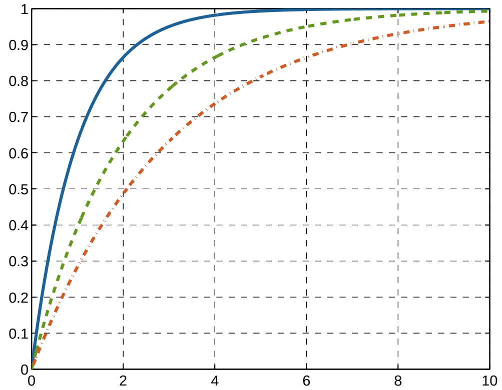
$$\begin{aligned} y(t) &= \text{bilens hastighet [m/s]} \\ u(t) &= \text{drivande/bromsande kraft från motor/bromsar [N]} \\ \alpha y(t) &= \text{bromsande kraft p.g.a. luftmotståndet [N]} \\ v(t) &= \text{störning som beror på vägens lutning [N]} \\ m &= \text{bilens massa [kg]} \end{aligned}$$

Poler och stegsvar

Stegsvar från första ordningens system

$$\frac{1}{sT + 1}$$

- $T = 1$
- $T = 2$
- $T = 3$



Tidskonstant

Parametern T i

$$G(s) = \frac{1}{sT+1}$$

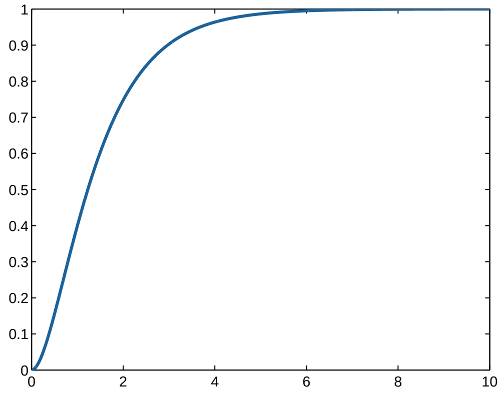
är ett mått på systemets snabbhet och kallas för **tidskonstant**.

Tidskonstanten är den tid det tar för stegsvaret att nå 63% av slutvärdet. (Denna definition gäller även för system av högre ordning.)

Poler och stegsvar...

Stegsvar från andra ordningens system

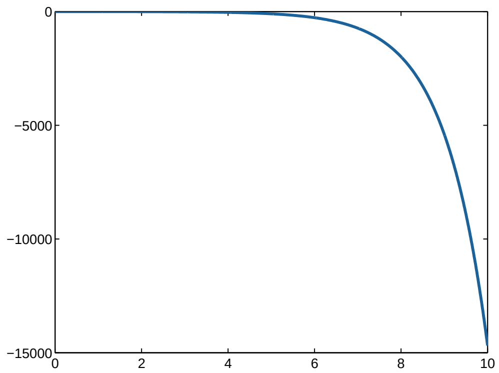
$$\frac{2}{(s+1)(s+2)}$$



Poler och stegsvar...

Stegsvar från andra ordningens system

$$\frac{-2}{(s-1)(s+2)}$$



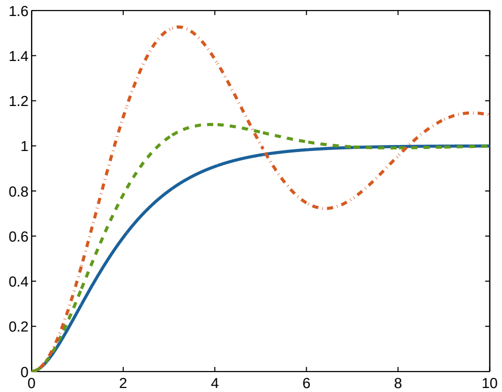
Poler och stegsvar...

Stegsvar från andra ordningens system

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- $\zeta = 1$
- $\zeta = 0.6$
- $\zeta = 0.2$

$(\omega_0 = 1)$

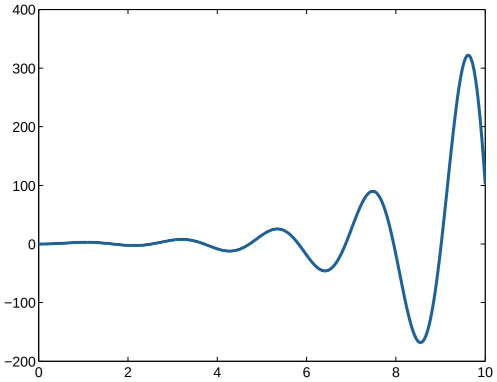


Poler och stegsvar...

Stegsvar från andra ordningens system

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$(\omega_0 = -3,\ \zeta = 0.2)$



Poler och stegsvar – Sammanfattning

- En pol (eller flera) i högra halvplanet ger ett instabilt system.
- Alla poler i vänster halvplan ger ett stabilt system.
- De poler som är närmast origo dominerar (oftast) dynamiken. (De långsammaste polerna bestämmer mest.)
- Dominerande poler långt från origo ger ett snabbt system.
- Dominerande poler med stor imaginärdel (jämfört med realdelen) ger ett oscillativt (slängigt) system.

M. Enqvist
TTIT62: Föreläsning 3
AUTOMATIC CONTROL
REGLERTEKNIK
LINKÖPINGS UNIVERSITET