

2.1 Mikromodul: stokastiska processer

2.1.1 Stokastiska variabler

En stokastisk variabel X beskrivs av dess täthetsfunktion $p_X(x)$, vars viktigaste egenskaper sammanfattas i dess första två s.k. moment: medelvärde och varians

$$E(X) = \int_x x p_X(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = \int_x (x - E(X))^2 p_X(x) dx = E(X^2) - (E(X))^2$$

Normalfördelningen har

$$p_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

där parametrarna $\mu = E(X)$ och $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ beskriver hela täthetsfunktionen. Ett konfidensintervall med konfidensgrad 95% ges för normalfördelningen av $\mu \pm 1.96\sigma$, dvs. $\text{Prob}(|X - \mu| < 1.96\sigma) = 0.95$.

I MATLAB genereras ett normalfördelat slumpstal av `x=mu+sigma*randn(1,1)`. En vektor eller matris skapas av oberoende slumpstal skapas av `randn(n,m)`. Konfidensgraden för ett intervall kan verifieras numeriskt med

```
>> x=randn(10000,1);
>> length(find(x<1.96 & x>-1.96))/10000
ans =
    0.9512
```

dvs. 95% av alla slumpstal hamnar i intervallet $[-1.96, 1.96]$. Analytiskt kan sannolikheten $\text{Prob}(|X| > 1.96)$ räknas ut med

```
>> erfc(1.96)
ans =
    0.0056
```

2.1.2 Stokastiska vektorer och kovarians

En vektor X (dimension $n \times 1$) av stokastiska variabler beskrivs på analogt sätt av en vektorvärd täthetsfunktion, t.ex. den multivariabla

normalfördelningen

$$p_X(x; \mu, P) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(P)}} e^{-0.5(X-\mu)^T P^{-1}(X-\mu)}.$$

Väntevärde μ ($n \times 1$) och kovarians P ($n \times n$) definieras av

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = \int_x x p_X(x) dx \\ P &= \text{Cov}(X) = E[(x - \mu_X)(x - \mu_X)^T] \\ &= \int_x (x - \mu_X)(x - \mu_X)^T p_X(x) dx. \end{aligned}$$

Kovariansen anger hur starkt kopplade slumpalen är till varandra. Om element $P_{ij} = 0$ betyder det att elementen x_i och x_j är okorrelerade. Omvänt, om $P_{ij} > 0$ så är x_i och x_j positivt korrelerade så ett om den ena är positiv så är den andra det sannolikt också.

Konfidensintervall kan enkelt generaliseras till vektorer. Ett område med konfidensgrad 95% ges för normalfördelningen av $\{X : (X - \mu)^T P^{-1}(X - \mu) < 1.96\}$.

En linjärtransformation $Y = AX$ ger en ny stokastisk vektor Y (som kan vara längre eller kortare än X). Från definitionen härleds enkelt följande räkneregler för de första momenten:

$$\begin{aligned} Y &= AX \Rightarrow \\ \mu_Y &= E(Y) = AE(X) = A\mu_X \\ P_Y &= \text{Cov}(Y) = ACov(X)A^T = AP_X A^T. \end{aligned}$$

En normalfördelad vektor av slumpalen kan genereras i MATLAB med

```
[U,S,V]=svd(P);
Psqrt=U*sqrt(S);
x=mu+Psqrt*randn(n,1);
```

De första två raderna räknar ut en matriskvadratrot av P som definieras av $P^{1/2}P^{1/2} = P$. SVD faktoriserar en godtycklig matris $P = USV^T$, där U är unitär (dvs. $U^T U = U U^T = I$) och S är diagonal. I detta fall när P är symmetrisk och positivt semidefinit gäller att $U = V$ och $S_{ii} \geq 0$. Från dessa egenskaper följer att kvadratrotsdefinitionen är uppfylld med konstruktionen $P^{1/2} = US^{1/2}$.

Följande exempel illustrerar principerna för linjära avbildningar. 200 slumpstal X från standardnormalfördelningen genereras först, och avbildas sedan linjärt på 200 stokastiska vektorer Y .

```
X=randn(2,200);
A=[1 0.5;0 1];
Y=A*X;
figure(1)
plot(X(1,:),X(2,:),'.')
figure(2)
plot(Y(1,:),Y(2,:),'.')
```

Kovariansmatrisen ges av

$$P = AIA^T = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

vilken illustreras av nivåkurvan i figur 2.1.b

Härur följer t.ex. att $\text{Var}(y_1) = P_{11} = 1.25$ och $E(y_1y_2) = 0.5$. Elementen y_1 och y_2 är alltså positivt korrelerade, så om den ena är positiv så är den andra det också med stor sannolikhet.

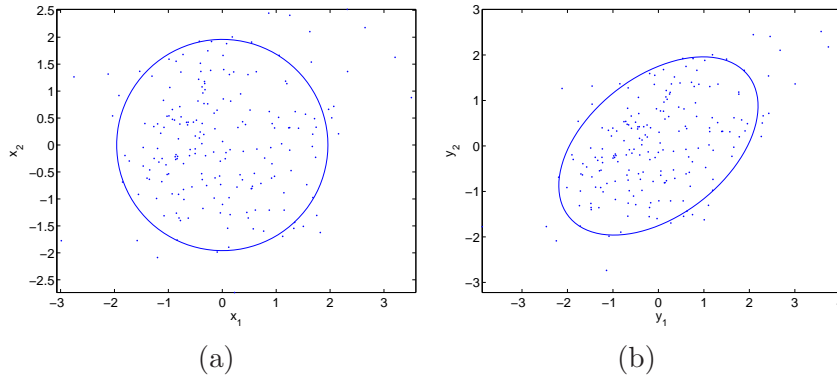
Den ellips som svarar mot 95% av alla punkter ritas med nedanstående beräkningar, där enhetscirkeln avbildas av samma transformation $y = Ax$ och sedan skalas till önskad konfidensgrad.

```
P=A*A'
phi=linspace(0,2*pi,100);
x=[cos(phi);sin(phi)];
y=A*x;
plot(1.96*y(1,:),1.96*y(2,:),'-')
```

Notera att den positiva korrelationen mellan y_1 och y_2 kan ses på ellipsens form.

2.1.3 Stokastiska processer och kovariansfunktionen

Om $x[k]$ är en sekvens av stokastiska variabler är det en stokastisk process. Den stora skillnaden på en stokastisk vektor och en stokastisk process är att den senare oftast anses vara oändligdimensionell. I övrigt



Figur 2.1 Tvådimensionella normalfördelade slumpstal med väntevärde noll och kovariansmatris $P = I$ respektive $P = AA^T$. Ett konfidensområde svarande mot 95% av alla punkter är också markerat.

definieras väntevärdessfunktionen och kovariansfunktionen (notera ordet funktion i dessa begrepp) analogt:

$$m_x[k] = \mathbb{E}(x[k])$$

$$R_{xx}[k, l] = \mathbb{E}((x[k] - m_x[k])(x[l] - m_x[l]))$$

Ser vi x som en vektor med element $x[k]$, ges väntevärdet av en vektorn med element $\mu_k = m[k]$ och kovariansen av matrisen P med element $P_{kl} = R_{xx}[k, l]$.

Vi fokuserar på processer med medelvärde 0 ($m_x[k] = 0$) som är stationära. Stationäritet definieras av att $R_{xx}[k, l] = R_{xx}[k - l]$, dvs. endast tidsskillnaden och inte absolut tid inverkar på kovariansfunktionen, och skriver

$$R_{xx}[l] = \mathbb{E}(x[k]x[k - l]).$$

Om x tolkas som en vektor av längd N blir kovariansmatrisen

$$\text{Cov}(x) = \begin{pmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \dots & R_{xx}[N - 1] \\ R_{xx}[-1] & R_{xx}[0] & \dots & R_{xx}[N - 2] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[-N + 1] & R_{xx}[-N + 2] & \dots & R_{xx}[0] \end{pmatrix}.$$

På grund av symmetrin i matrisen (kallas för Toeplitz-struktur), samt symmetrin $R_{xx}[-k] = R_{xx}[k]$, räcker det med att specificera första

raden i denna matris. Notera att första raden sammanfaller med kovariansfunktionen för den stationära processen.

Korskovariansfunktionen definieras analogt som

$$R_{xy}[l] = E(x[k]y[k-l]).$$

I motsats till kovariansfunktionen som alltid är symmetrisk gäller här att $R_{yx}[-l] = R_{xy}[l] \neq R_{xy}[-l] = R_{yx}[l]$.

Ett typexempel på stationär stokastisk process är filtrerat vitt brus. Vitt brus svarar mot en sekvens av oberoende slumpstal $x[k]$ med $m_x[k] = 0$ och $R_{xx}[k] = \delta[k]$.

Exempel: en sekvens $y[k]$ genereras från vitt brus $x[k]$ med följande rekursion

$$y[k] = 0.8y[k-1] + x[k].$$

Rekursionen kan utvecklas till

$$y[k] = x[k] + 0.8x[k-1] + \dots + 0.8^l x[k-l] + \dots$$

Kausalitet ger att $y[k]$ är oberoende av framtida $x[k+l]$, så att korskovariansfunktionen blir

$$R_{yx}[l] = E(y[k]x[k-l]) = \begin{cases} 0.8^l, & l \geq 0, \\ 0, & l < 0. \end{cases}$$

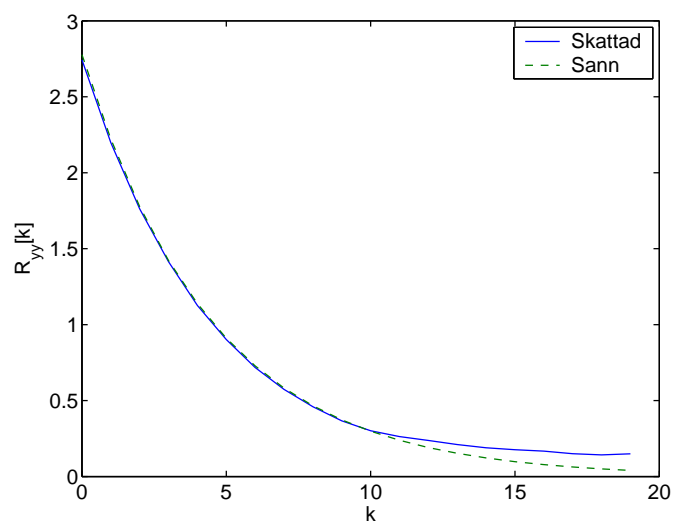
På motsvarande sätt blir kovariansfunktionen för $y[k]$

$$\begin{aligned} R_{yy}[l] &= E(y[k]y[k-l]) \\ &= E((x[k] + 0.8x[k-1] + \dots)(x[k-l] + 0.8x[k-l-1] + \dots)) \\ &= 0.8^{|l|} \sum_{i=1}^{\infty} (0.8^2)^i = 0.8^{|l|} \frac{1}{1-0.8^2} = 0.8^{|l|} \frac{25}{9} \approx 2.78 \cdot 0.8^{|l|} \end{aligned}$$

I MATLAB kan exemplet testas med

```
x=randn(10000,1);
y=filter([1 0],[1 -0.8],x);
Ryy=covf(y,20)
k=0:19;
plot(k,Ryy,'-',k,25/9*0.8.^k,'--')
```

vilket genererar Figur 2.2.



Figur 2.2 Skattad och sann kovariansfunktion $R_{yy}[k]$.