Föreläsning 9

Skattning av tillståndsvariabler (9.4)

Hur gör man när vissa tillståndsvariabler ej kan mätas?

Idé: Simulera den matematiska modellen. Beteckna tillstånden i simuleringen $\hat{x}$.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

Utnyttja skillnaden mellan mätt utsignal och skattad utsignal

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

d v s

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Detta system kallas en observatör.

Hur välja K?

Studera förändringen av avvikelsen $\tilde{x} = x - \hat{x}$.

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x}) = (A - KC)\tilde{x}$$

Normal är $\tilde{x}(0) \neq 0$. $\tilde{x} \to 0$ om alla egenvärden till $A - KC$ ligger i VHP. $A - KC$ har n st egenvärden. K har n st komponenter. Om systemet är observerbart kan egenvärdena placeras godtyckligt. I praktiken begränsas egenvärdenas placering av storleken på mätstörningarna.

Exempel: Robotarmen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y = (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A - KC)) = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0$$

Önskade egenvärden i t ex $-4 \Rightarrow$ önskat polynom

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

Jämförelse ger $k_1 = 8, k_2 = 16$

Observatör

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} (y - \hat{x}_1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} y$$

Tolkning: Laplace ger

$$\hat{X}(s) = (sI - A + KC)^{-1}(BU(s) + KY(s))$$

Exempel: Matriser enligt ovan ger

$$\hat{X}_2(s) = \frac{s+8}{s^2+8s+16}U(s) + \frac{16s}{s^2+8s+16}Y(s)$$

Återkoppling från skattade tillstånd (9.5)

Idé: Använd $\hat{x}$ för återkoppling.

System:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$

Observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Återkoppling:

$$u = -L\hat{x} + l_0 r$$

Regulator på överföringsfunktionsform. Laplacetransformering av

$$\dot{\hat{x}} = (A - BL - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

ger

$$\hat{X}(s) = (sI - A + BL + KC)^{-1}(KY(s) + BR(s))$$

Med ($l_0 = 1$)

$$U(s) = -L\hat{X}(s) + R(s)$$

fås

$$U(s) = F_r(s)R(s) - F_y(s)Y(s)$$

där

$$F_r(s) = 1 - L(sI - A + KC + BL)^{-1}B \qquad F_y(s) = L(sI - A + KC + BL)^{-1}K$$

Exempel: A, B, C, K och L enligt ovan ger

$$F_r(s) = \frac{s^2 + 8s + 16}{s^2 + 14s + 73} \qquad F_y(s) = \frac{6s + 57}{s^2 + 14s + 73}$$

Återkopplat system? Blockschemaräkning ger

$$G_C(s) = \frac{F_r(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)}$$

och

$$S(s) = \frac{1}{1 + F_y(s)}$$

Detta innebär att den komplementära känslighetsfunktionen ges av

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)}$$

Analys och konstruktion av reglersystem med hjälp av frekvensfunktioner (5.2-5.3)

Återkopplat system:

Enligt tidigare gäller att

$$Y(s) = G_C(s)R(s)$$

där

$$G_C(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}$$

och

$$G_O(s) = F(s)G(s)$$

är det "öppna" systemet (kretsförstärkningen).

Förutsättning:

- $G(s)$ given i form av $G(i\omega)$ i ett Bodediagram.
- Vi har konstruerat eller ska konstruera $F(s)$, d v s $F(i\omega)$.

Exempel på användning av frekvensfunktionerna:

- Analysera det återkopplade systemets egenskaper med avseende på (i): stabilitet, (ii): snabbhet, (iii): oscillationer/dämpning, (iv): stationära fel.
- Analysera inverkan av s k tidsfördröjningar.
- Analysera inverkan av modellosäkerheter.
- Konstruera $F(s)$.

Stabilitet:

På gränsen mellan stabilitet och instabilitet har $G_C(s)$ poler på imaginäraxeln, d v s det finns $s = i\omega_0$ så att

$$1 + G_O(i\omega_0) = 0$$

d v s

$$\mid G_0(i\omega_0) \mid = 1$$

och

$$\arg G_0(i\omega_0) = -180^\circ \quad (-\pi)$$

Antag att $\mid G_0(i\omega) \mid$ och $\arg G_0(i\omega)$ båda avtar monotont. Inför: (Se Fig 5.3)

- ω_c – amplitudskärfrekvens, $\mid G_O(i\omega_c) \mid = 1$.
- ϕ_m – fasmarginal, $\arg G_O(i\omega_c) - (-180^\circ) = \arg G_0(i\omega_C) + 180^\circ$.
- ω_p – fasskärfrekvens, $\arg G_O(i\omega_p) = -180^\circ$.
- A_m – amplitudmarginal, $A_m = 1/ \mid G_O(i\omega_p) \mid$.

Det återkopplade systemet är på gränsen mellan stabilitet och instabilitet då $\phi_m = 0$ och $A_m = 1$, och då är även $\omega_C = \omega_P = \omega_0$.

Hur fås stabilitet? Normalt, minska förstärkningen, d v s "sänk" $\mid G_0(i\omega) \mid$. Detta medför att ω_C minskar och ϕ_m ökar.

Stabilitetsvillkor: $\phi_m > 0$ och $A_m > 1$.

Intuitivt resonemang: Följ en sinussignal runt i reglersystemet. (Se Fig 5.5)

Om förstärkningen är större än ett för den vinkelfrekvens då fasvridningen är -180° kommer sinusignalens amplitud att öka.