Föreläsning 8

Styr- och observerbarhet (8.8)

Givet

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

Har modellen rätt antal tillstånd?

Tillräckligt många: $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots$ kan uttryckas med hjälp av $x_1, x_2, \ldots$.

Ej alltför många: Tillståndsmodellen är minimal om insignal-utsignalsambandet ej kan beskrivas med färre tillståndsvariabler.

Styrbarhet:

Definition: Boken s 172

Tolkning: "Alla tillstånd kan påverkas av $u(t)$."

Krav:

$$\det\ S = det(B\ AB \ldots A^{n-1}B) \neq 0$$

Exempel: Robotarmen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ger

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det S \neq 0$$

Observerbarhet:

Definition: Boken s 173

Tolkning: "Alla tillstånd syns i $y(t)$."

Krav:

$$\det\ O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

Exempel: Robotarmen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ger

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det O \neq 0$$

Minimal realisering: Systemet är styr- och observerbart.

Tillståndsåterkoppling (9)

Använd informationen i tillståndvariablerna för att styra systemet

Använd återkopplingen

$$u = -l_1x_1 - \ldots - l_nx_n + l_0r = -Lx + l_0r$$

där

$$L = (l_1 \ldots l_n)$$

Återkopplat system?

$$\dot{x} = Ax + B(-Lx + l_0r) = (A - BL)x + Bl_0r \qquad y = Cx$$

Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, d v s rötterna till ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

Matrisen $A - BL$ har n st egenvärden och L har n st element.

Om systemet är styrbart kan det återkopplade systemets poler placeras godtyckligt. I praktiken begränsas polernas placering av begränsningar på styrsignalen.

Exempel: Robotarmen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y = (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + l_2\lambda + l_1 = 0$$

Önskade poler i t ex $-3 \Rightarrow$ önskad ekvation

$$(s+3)^2 = s^2 + 6s + 9 = 0$$

Jämförelse ger

$$l_1 = 9 \quad l_2 = 6$$

Återkopplingen

$$u = -9x_1 - 6x_2 + l_0 r$$

ger det återkopplade systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Konstanten l_0 används för att ge det återkopplade systemet önskad statisk förstärkning. Oftast önskas $y = r$ i stationärt tillstånd vid konstant r.

Exempel: Antag r konstant. I stationärt tillstånd fås

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \quad \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2 + l_0 r = 0$$

vilket tillsammans med

$$y = x_1$$

ger

$$9y = l_0 r$$

Statisk förstärkning ett fås med $l_0 = 9$. Återkoppling

$$u = -9x_1 - 6x_2 + 9r$$

Integralverkan vid tillståndsåterkoppling (9.6)

System påverkat av störning

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fv \qquad y = Cx$$

där v är en konstant störning.

Hur uppnå $y = r$ i stationär tillstånd trots v?

Inför integralen av reglerfelet som tillstånd

$$x_{n+1} = \int_0^t e(s)ds = \int_0^t r(s) - Cx(s)ds$$

Tillståndsekvation

$$\dot{x}_{n+1}(t) = r(t) - Cx(t)$$

Utökad tillståndsmodell

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

Återkoppla

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BL & -Bl_{n+1} \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

Antag $l_1, \ldots l_{n+1}$ väljs så det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt. I stationärt tillstånd gäller $\dot{x} = 0$ och

$$\dot{x}_{n+1} = r - Cx = r - y - 0$$

d v s $y = r$ trots v.