Föreläsning 7

Tillståndsbeskrivning (8)

Exempel: Robotarm

$$J\ddot{y}(t) = u(t)$$

$y(t)$ – vinkelläge (utsignal)

$u(t)$ – moment (insignal)

J – tröghetsmoment

Studera både vinkelläge och vinkelhastighet. Inför

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Hur förändras $x_1(t)$ resp $x_2(t)$? Beräkna $\dot{x}_1(t)$ resp $\dot{x}_2(t)$.

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{J}u(t)$$

Tillståndsvariablerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ representerar den kunskap som behövs för att, tillsammans med $u(t)$ bestämma systemets framtida beteende.

Antag t ex $u(t) = 1$ och $J = 1$.

$$\ddot{y}(t) = 1 \Rightarrow \dot{y}(t) = t + C_1 \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Både $y(0)$ och $\dot{y}(0)$ behövs för att bestämma $y(t)$.

Skriv på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Inför

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

och matriserna A, B och C.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

System på tillståndsform (8.5)

Ett n:te ordningens system som beskrivs av differentialekvationen

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + \ldots + b_n u(t)$$

kan beskrivas av ett system av n st tillståndsekvationer

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + Bu(t)$$

$$y(t) = C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Tillståndsbeskrivningen kan skapas på många sätt. Exempel:

- Diagonalform
- Kanoniska former
- ...

Tillståndsvariablerna kan väljas på oändligt många sätt. Inför $z = Tx$ där T är inverterbar d v s $x = T^{-1}z$. Ny tillståndsform

$$\dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \qquad y(t) = CT^{-1}z(t)$$

Från tillståndsform till överföringsfunktion (8.6)

Laplacetransformering ger ($x(0) = 0$)

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

som ger

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Tillsammans med $Y(s) = CX(s)$ ger detta

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

d v s

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Regel för 2×2 matriser:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \det M = ad - bc$$

Detta ger

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

och

$$G(s) = \frac{1}{s^2}(1 \ \ 0) \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}(1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}$$

Ekvationen

$$\det(sI - A) = 0$$

kallas sekularekvationen och ger egenvärdena till matrisen A.

Om ej någon förkorting av faktorer sker vid beräkning av $G(s)$ är systemets poler lika med egenvärdena till A.

Linjärisering (8.4)

System är i verkligheten ofta olinjära

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

d v s

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n, u) \end{aligned}$$

o s v.

Antag att $u(t) = u_0$ och att $x(t) \to x_0$, d v s $\dot{x}(t) \to 0$. (x_0, u_0) kallas en stationär punkt. Där gäller att

$$f(x_0, u_0) = 0 \qquad y_0 = h(x_0, u_0)$$

Idé: Taylorutveckla f och h omkring (x_0, u_0)

Inför:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_0$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u_0$$

$$\Delta y(t) = y(t) - y_0$$

d v s

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t)$$

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t)$$

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t)$$

$f(x, u) = f(x_0, u_0) + f_x(x_0, u_0)\Delta x(t) + f_u(x_0, u_0)\Delta u(t) + \textit{högre ordningens termer}$

där

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0, u=u_0}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{pmatrix}_{x=x_0, u=u_0}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0, u=u_0}$$

Försumma högre ordningens termer. Bilda en linjär modell med $\Delta x(t)$ som tillstånd, $\Delta u(t)$ som insignal och $\Delta y(t)$ som utsignal. Detta ger

$$\dot{\Delta} x(t) = \dot{x}(t) - \frac{d}{dt}x_0 = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

och

$$\Delta y(t) = C\Delta x(t)$$