Föreläsning 6

Bodediagram (4.3)

$\mid G(i\omega) \mid$ som funktion av ω – amplitud-/förstärkningskurva

$\arg G(i\omega)$ som funktion av ω – fas-/argumentkurva

Exempel:

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{b/a}{1+s/a} \quad a > 0, b > 0$$

Amplitudkurva:

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{b/a}{\mid 1 + i \cdot \frac{\omega}{a} \mid} = \frac{b/a}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{a})^2}}$$

Faskurva:

$$\arg G(i\omega) = \arg(\frac{b/a}{1 + i\frac{\omega}{a}}) = \arg b/a - \arg(1 + i\frac{\omega}{a}) = -\arctan\frac{\omega}{a}$$

Små ω ($\omega < a$):

$$\mid G(i\omega) \mid \approx \frac{b}{a}$$

d v s en vågrät linje (lågfrekvensapproximation), och

$$\arg G(i\omega) \approx 0$$

Stora ω ($\omega > a$):

$$\mid G(i\omega) \mid \approx \frac{b}{\omega}$$

(högfrekvensapproximation), och

$$\arg G(i\omega) \approx -90^\circ$$

Approximationerna möts i brytfrekvensen $\omega = a$.

Att notera: En faktor i nämnaren hos överföringsfunktionen medför att amplitudkurvan avtar för ω över brytfrekvensen. Faskurvan är negativ.

Exempel:

$$G(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

På motsvarande sätt fås:

Amplitudkurva:

$$\mid G(i\omega) \mid = \sqrt{1 + (\frac{\omega}{a})^2}$$

Faskurva:

$$\arg G(i\omega) = \arctan \frac{\omega}{a}$$

För små ω ($\omega < a$) fås:

$$\mid G(i\omega) \mid \approx 1$$

och

$$\arg G(i\omega) \approx 0$$

För stora ω ($\omega > a$) fås:

$$\mid G(i\omega) \mid \approx \omega/a$$

och

$$\arg G(i\omega) \approx 90^\circ$$

Att notera: En faktor i täljaren hos överföringsfunktionen medför att amplitudkurvan ökar för ω över brytfrekvensen. Faskurvan är positiv.

Exempel:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

vilket ger

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

På liknande sätt fås för $\omega < \omega_0$ lågfrekvensapproximationen

$$\mid G(i\omega) \mid \approx 1$$

och för $\omega > \omega_0$ fås hgfrekvensapproximationen

$$\mid G(i\omega) \mid \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Notera särskilt vid brytfrekvensen $\omega = \omega_0$:

$$\mid G(i\omega_0) \mid = \frac{1}{2\zeta}$$

För små ζ stämmer approximationerna dåligt.

Jämför med stegsvaret!

Allmänt:

$$G(s) = \frac{K(1+\frac{s}{z_1})\cdots(1+\frac{s}{z_m})}{s^p(1+\frac{s}{p_1})\cdots(1+\frac{s}{p_n})}$$

Hur göra när $G(s)$ innehåller flera faktorer i täljare och nämnare?

Logaritmera!

$$\log \mid G(i\omega) \mid = \log K + \log \mid 1 + \frac{i\omega}{z_1} \mid + \ldots + \log \mid 1 + \frac{i\omega}{z_m} \mid$$

$$-p \log \omega - \log \mid 1 + \frac{i\omega}{p_1} \mid \ldots - \log \mid 1 + \frac{i\omega}{p_n} \mid$$

För små ω gäller:

$$\log \mid G(i\omega) \mid \approx \log K - p \log \omega$$

d v s överföringsfunktionen kan approximeras

$$G(s) \approx \frac{K}{s^p}$$

För stora ω gäller:

$$\mid G(i\omega) \mid \approx \log \bar{K} + m \log \omega - p \log \omega - n \log \omega = \bar{K} - (p+n-m) \log \omega$$

Faskurva:

$$\arg G(i\omega) = \arctan \frac{\omega}{z_1} + \ldots + \arctan \frac{\omega}{z_m} - p \cdot 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{p_1} - \ldots - \arctan \frac{\omega}{p_n}$$

För små ω är $\arg G(i\omega) \approx -p \cdot 90^\circ$

För stora ω är $\arg G(i\omega) \approx (m-n-p) \cdot 90^\circ$

Matlab: `bode`

Exempel:

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

Vid $\omega = 1$ är $\mid G \mid \approx -1$ dB.

Ett tal X motsvarar i deciBel (dB) $20 \cdot \log_{10} X$.

Förstärkning -1 dB motsvarar förstärkningen $10^{-1/20} \approx 0.9$.

Vid $\omega = 1$ är $\arg G \approx -25^\circ = -25 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad. Detta motsvarar tidsförskjutningen $\phi/\omega \approx 0.45$ sekunder.