Föreläsning 5

Frekvensinnehåll hos signaler (4)

Påstående: “Alla” signaler innehåller frekvenser.

Frekvens - mått på variation

Långsam variation - låg frekvens

Snabb variation - hög frekvens

Exempel: Sinussignal

$$u(t) = A \sin \omega t$$

där A - amplitud, T - periodtid, $\omega = 2\pi/T$ vinkelfrekens. T ex $A = 1, T = 10, \omega = 0.2\pi$.

Exempel: Periodisk signal (tex fyrkantvåg, en följd av steg). T ex $A = 1, T = 10$

Vilka frekvenser innehåller fyrkantvågen?

Approximera med en sinussignal med period $T = 10$ d v s $\omega_0 = 2\pi/T$.

Addera en sinussignal med period $T = 1/3 \cdot 10$, d v s $3\omega_0$

Addera en sinussignal med period $T = 1/5 \cdot 10$, d v s $5\omega_0$.

Etc.

OBS! De höga frekvenserna behövs för att skapa det snabba förloppet i $u(t)$.

Allmänt: En periodisk signal kan beskrivas som en summa av sinus- och cosinusfunktioner med vinkelfrekvenserna $n \cdot \omega_0$ där $\omega_0 = 2\pi/T$ och $n = 0, 1, 2, \ldots$. (Fourierserie)

Frekvenssvar (4.2)

Hur reagerar ett system på påverkan med viss frekvens? Antag:

- $u(t) = A \sin \omega t$
- $G(s)$ stabilt.

Från tidigare:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

där

- $y_h(t) \to 0$ eftersom systemet är stabilt
- $y_p(t)$ "liknar" $u(t)$.

Mera precist (då y_h gått mot noll):

$$y(t) =\mid G(i\omega) \mid A \sin(\omega t + \phi)$$

där $\phi = \arg G(i\omega)$. (Härledning ges i boken.)

$G(i\omega)$ kallas frekvensfunktion.

Observationer:

- $y(t)$ är förstärkt/dämpad (amplituden förändras) jämfört med $u(t)$.
- $y(t)$ är fasvriden (tidsförskjuten) jämfört med $u(t)$.

Exempel:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Uttrycket ovan ger

$$y(t) =\mid G(i\omega) \mid A \sin \omega (t + \phi/\omega)$$

där ϕ/ω har dimensionen tid. Argumentet ϕ är normalt negativ, d v s tidsförskjutningen är negativ, d v s $y(t)$ ligger "efter" $u(t)$.

Från tidigare: En fyrkantsignal kan skrivas som en summa av sinussignaler

$$u(t) = b_1 \sin \omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + b_5 \sin 5\omega_0 t + b_7 \sin 7\omega_0 t + \ldots$$

Hur reagerar systemet på fyrkantsignalen?

Exempel:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

ger

$$| G(i\omega) | = \left| \frac{1}{1+i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Funktionen $| G(i\omega) |$ avtar, d v s högre frekvenser dämpas mera.

Utsignalen $y(t)$ kommer inte att innehålla lika mycket av högre frekvenser, d v s variera långsammare än insignalen.

Ett sätt att ange hur höga frekvenser som "släpps igenom" är bandbredden.

Antag: $| G(i \cdot 0) | = 1$. Då definieras bandbredden ω_B via

$$| G(i\omega_B) | = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exempel:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Systemet har bandbredden $\omega_B = a$.

Från tidgare: Stigtiden ges av $T_r \approx 2.2/a$.

Alltså: Hög bandbredd $\equiv$ kort stigtid $\equiv$ poler långt till vänster i VHP

Exempel:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

Från tidigare:

$$T_r \approx \frac{1}{\omega_0} e^{\phi / \tan\phi}$$

d v s kortare stigtid då polernas avstånd till origo ω_0 är större.

Bandbredden ω_B är proportionell mot ω_0. (Se boken, sid 99)

När ζ är litet gäller:

- Polernas imaginärdel är stor relativt realdelen.
- Stegsvaret en stor översläng (M stor).
- $\mid G(i\omega) \mid$ har en s k resonanstopp M_P.