Föreläsning 4

Stabilitet (2.5)

Från tidigare: Systemets poler (rötterna till kar. ekv.) påverkar egenskaperna hos diffekvationens lösning.

Definition av insignal-utsignalstabilitet: OH-bild

Sats 2.1: OH-bild

Sats 2.2: OH-bild

Hur avgöra stabiliteten hos ett system? I denna kurs: Rotort (kommer senare)

Specifikationer (3.6)

Mått på reglersystems prestanda:

(i) Utsignalens förmåga att följa en given signal

(ii) Reglerfelets storlek i stationärt tillstånd

(i): Låt insignalen vara ett enhetssteg. Antag att $y(t) \to 1$. Boken Fig 3.17.

- Stigtid: $T_r = t_2 - t_1$ där $y(t_1) = 0.1$ och $y(t_2) = 0.9$. Mått på systemets snabbhet.
- Översläng: $M = (y_{max} - 1) \cdot 100 \ (\%)$. Mått på oscillationer (dämpning).
- Lösningstid: T_s. Den tidpunkt T_s som uppfyller att $1 - p \leq y(t) \leq 1 + p$ för $t \geq T_s$ där t ex $p = 0.05$. Mått på snabbhet och dämpning.

Exempel: (Avsnitt 2.6 och Exempel 3.2)

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad (a > 0)$$

Pol: $s = -a$.

Boken Figur 2.5.

- $T_r \approx \frac{2.2}{a}$
- $T_s \approx \frac{3}{a} \qquad (5\ \%)$
- $M = 0$

Exempel: (Avsnitt 2.6 och Exempel 3.3)

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \zeta = \cos(\phi) \qquad (0 < \zeta \leq 1)$$

Poler: På avstånd ω_0 från origo och vinkel ϕ neg realaxeln.

Boken Figur 2.7.

- $T_r \approx \frac{1}{\omega_0} e^{\phi/\tan\phi}$
- $T_s \approx \frac{3}{\omega_0 \zeta}$ (5 %)
- $M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot 100$ (%)

(ii): Reglerfelets storlek anges med s k felkoefficienter.

$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t)$ då $r(t)$ är ett enhetssteg.

$e_1 = \lim_{t\to\infty} e(t)$ då $r(t)$ är en enhetsramp.

Gränsvärdet för $e(t)$ existerar om alla rötter λ till nämnaren i $E(s)$ uppfyller $Re(\lambda) < 0$ plus högst en i origo.

Från blockschemat:

$$E(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}R(s) = S(s)R(s)$$

där

$$S(s) = \frac{1}{1+G_O(s)}$$

kallas känslighetsfunktion.

Detta ger med slutvärdessatsen

$$e_0 = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G_0(0)}$$

$e_0 = 0$ om $G_0(s)$ innehåller en integration, d v s

$$G_0(s) = \frac{(\quad)\cdots(\quad)}{s(\quad)\cdots(\quad)}$$

På samma sätt fås

$$e_1 = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG_0(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_0(s)}$$

$e_1 = 0$ om $G_0(s)$ innehåller två integrationer.

Rotort (3.7)

Hur analysera stabiliteten hos ett system?

Kom ihåg: Ett system är (insignal-utsignal)-stabilt om alla rötter s_i till den karakterisiska ekvationen

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

uppfyller att $Re(s_i) < 0$.

Hur kontrollerar man detta?

Exempel:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Kan lösas för hand ("PQ-formeln").

Exempel:

$$s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$$

Kan lösas numeriskt med, t ex, Matlab.

Exempel:

$$s^3 + 4s^2 + Ks + K = 0$$

där $K \geq 0$. Rötterna kommer att bero av värdet på K.

Rotort: Ett sätt att rita var rötterna hamnar för olika värden på K, utan att lösa ekvationen.

Exempel I:

$$(s+1)(s+2)(s+3)+K=0$$

d v s

$$s^3+6s^2+11s+6+K=0$$

```
>> rlocus(tf(1,[1 6 11 6])
```

- Kryssen markerar var rötterna är placerade då $K = 0$.
- Kurvorna markerar hur rötterna rör sig när K ökar, d v s $K \to \infty$.
- Den kritiska situationen är om/då någon rot går ut i höger halvplan, eftersom då blir $Re(s_i) > 0$ för något/några s_i.

Exempel II:

$$(s+1)(s+2)(s+3)+(s+0.5)K=0$$

```
>> rlocus(tf([1 0.5],[1 6 11 6])
```

- Kryssen markerar var rötterna är placerade då $K = 0$.
- En rot går mot punkten -0.5, markerad med en ring.

Vilka mönster kan man se?

Allmän karakteristisk ekvation:

$$P(s) + KQ(s) = 0$$

där

$$fP(s) = (s - p_1) \cdots (s - p_n)$$

är ett polynom av ordning n med rötter p_i.

$$Q(s) = (s - q_1) \cdots (s - q_m)$$

är ett polynom av ordning m med rötter q_i.

Observation I:

- Rotortens startpunkter utgörs av röttena till $P(s)$ d v s $p_1, \ldots p_n$
- Rotortens slutpunkter (om det finns några) utgörs av rötterna till $Q(s)$ d v s $q_1, \ldots q_m$.

Observation II:

- För $n - m$ st rötter finns det ingen slutpunkt.
- Dessa rötter går mot ∞ i bestämda riktningar,

$$\frac{\pi}{n-m} + \frac{2\pi}{n-m} \cdot l \qquad l = 0, 1, \ldots$$

Observation III:

- I Exempel I går två rötter in i HHP för ett visst värde på K, alltså är systemet instabilt när K är större än detta värde
- Motsvarande värde på K kan bestämmas med kommandot `rlocfind`.
- I Exempel II stannar alla rötter i VHP för alla värden på K.
- I Exempel II blir beteendet alltmer oscillativt när K blir större.