Föreläsningsanteckningar, TSRT22, HT1 2018

Svante Gunnarsson

September 2018

Föreläsning 1-3

Modeller av dynamiska system

Exempel: Temperaturreglering

u(t) - tillförd effekt (styrsignal/insignal)

y(t) - innetemperatur (utsignal)

v(t) - utetemperatur, vind, etc (störsignal)

r(t) - önskad innetemperatur (referenssignal)

Hur beror y(t) av u(t) och v(t)? (OBS! Avsevärt förenklad modell.)

Energibalans: Energiförändring/tidsenhet = tillförd effekt - bortförd effekt

$$m \cdot c \cdot \dot{y}(t) = u(t) - \lambda((y(t) - v(t))$$

där m, c och λ beror på massa, material, etc.

Inför:

$$T = \frac{m \cdot c}{\lambda} \qquad k = \frac{1}{\lambda}$$

Detta ger

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t) + v(t)$$

Dynamiskt system: Egenskaperna hos systemet beror av hur systemet påverkats fram till nuvarande tidpunkt.

Ytterligare exempel: Hastigheten hos ett fordon, tillståndet i ett biologiskt system, lönsamheten i ett företag.

Matematisk beskrivning: Differentialekvation

Differentialekvationer (2.4)

n:te ordningens linjär diff.ekvation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + \ldots b_n u(t)$$

där $a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_n$ är konstanta koefficienter

Antag:

- $u(t)$ känd för $t \geq 0$.
- $y(0), \dot{y}(0), \ldots$ kända

Då ges lösningen, för $t \geq 0$, till ekvationen av

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

där

- $$y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}$$

  och $r_1, r_2, \ldots$ är rötter till den karakteristiska ekvationen

  $$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

  samt koefficienterna $C_1, C_2, \ldots$ beräknas med hjälp av begynnelsevärden.
- $y_p(t)$ uppfyller diff.ekvationen (utan hänsyn till begynnelsevärden).

Exempel: Temperaturreglering

Antag $v(t) = 0$, vilket ger

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

samt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

och

$$y(0) = 0$$

Kar.ekv.

$$T \cdot r + 1 = 0$$

har lösningen $r = -\frac{1}{T}$, vilket ger

$$y_h(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$$

Vidare fås

$$y_p(t) = k$$

vilket ger

$$y(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + k$$

Begynnelsevillkoret ger

$$y(0) = C + k = 0$$

och därmed $C = -k$, vilket ger lösningen

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Inför: T - tidskonstant, k - statisk förstärkning. Båda kan bestämmas relativt enkelt via experiment.

Exempel: Komplexa rötter hos kar.ekv.

Antag att ekvationen har rötterna $r = \sigma \pm i \cdot \omega$. Det ger den homogena lösningen

$$y_h(t) = e^{\sigma t}(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)$$

Se läroboken avsnitt 2.4 eller läroboken i Analys.

Observationer: $y_h(t)$ (och även $y(t)$) oscillerar. $\sigma > 0$ medför att $y_h(t)$ växer obegränsat. $\sigma < 0$ medför att $y_h(t) \to 0$.

Hur styra dynamiska system?

Exempel: Temperaturreglering

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t) + v(t)$$

Hur välja $u(t)$ så att $y(t)$ beter sig på önskat sätt?

Öppen styrning

Antag: $r(t) = 20$ (önskad temperatur).

Från tidigare: När $v(t) = 0$ ger $u(t) = 1$ att $y(t) \to k$.

Idé: Tag $u(t) = \frac{20}{k}$. Detta ger $y(t) \to 20$ (OK!)

Men! Antag $v(t) = -10$ (vinterdag)

Lösning av diff.ekvationen enligt ovan ger att $y(t)$ går ej mot 20. (Ej OK!)

Alltså: Öppen styrning förmår ej hantera störningen, d v s den varierande utetemperaturen.

Proportionell återkoppling

Idé: Mät temperaturen och låt denna påverka den tillförda effekten.

Sätt för enkelhets skull $k = 1$ och $T = 1$, vilket ger

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) + v(t)$$

Proportionell återkoppling:

$$u(t) = K(r(t) - y(t))$$

där

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

kallas reglerfel och K är en positiv konstant.

Hur beror $y(t)$ av $r(t)$ och $v(t)$?

Insatt i ekvationen för huset fås:

$$\dot{y}(t) + y(t) = K(r(t) - y(t)) + v(t)$$

vilket ger

$$\dot{y}(t) + (1 + K)y(t) = Kr(t) + v(t)$$

Antag åter:

$$r(t) = \begin{cases} 20 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} -10 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

och $y(0) = 0$. Det ger (kontrollera gärna själv)

$$y(t) \to \frac{20K}{1+K} - \frac{10}{1+K} \approx 20$$

om K väljs stort.

Proportionell och integrerande återkoppling

Bättre: Låt u(t) öka så länge temperaturen är för låg, d v s då $y(t) < r(t)$. Bilda integralen

$$\int_0^t r(\tau) - y(\tau) d\tau$$

d v s

$$\int_0^t e(\tau) d\tau$$

och låt dess värde påverka den tillförda effekten.

Proportionell och integrerande återkoppling:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

där K_P och K_I är positiva konstanter.

Hur beror $y(t)$ av $r(t)$ och $v(t)$?

Laplacetransform (2.2, A.2)

Varför? Ett praktiskt sätt att hantera differentialekvationer.

Hur? "Översätt" tidfunktioner (signaler) till funktioner av en komplex variabel s.

Definition:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

där $f(t)$ är en tidsfunktion och $F(s)$ är dess transform.

Exempel (steg):

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = [-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^\infty = 0 - (-\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}$$

Exempel (ramp):

$$f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Rampen har transformen (partialintegration)

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Se även tabell på sid 233 eller annat tabellverk.

Översättningen är linjär:

- $cf(t)$ har transformen $cF(s)$.
- $f(t) + g(t)$ har transformen $F(s) + G(s)$.

Överföringsfunktion (2.2)

Transformering av derivator:

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = sF(s) - f(0)$$

"Bevis":

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s)$$

Exempel: Temperaturreglering ($v(t) = 0$)

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t) \quad y(0) = 0$$

ger

$$sTY(s) + Y(s) = kU(s)$$

d v s

$$Y(s)(sT + 1) = kU(s)$$

vilket ger

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{k}{sT + 1}$$

kallas systemets överföringsfunktion. $G(0)$ kallas systemets statiska förstärkning.

Allmänt (tidsargumentet t utelämnat):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 u^{(n)} + \ldots b_n u$$

Antag att alla begynnelsevärden är noll. Transformering ger

$$s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_n Y(s) = b_0 s^n U(s) + \ldots + b_n U(s)$$

och

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Rötterna till Ekvationen

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

kallas systemets poler (rötter till den karakteristiska ekvationen).

Rötterna till ekvationen

$$b_0 s^n + \ldots + b_n = 0$$

kallas systemets nollställen.

Viktfunktion (2.3)

Frågor:

- Vad är inverstransformen av $G(s)$, d v s $g(t)$?
- Hur relateras $u(t)$ och $g(t)$?

Svar:

- $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ kallas viktfunktion (impulssvar) och består normalt av en summa av exponentialfunktioner.
- $G(s)U(s)$ har inverstransformen

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Notera: Insignalen i hela tidsintervallet $0 \leq \tau \leq t$ har inverkan på $y(t)$. Inverkans storlek bestäms av $g(t)$.

Linjäritet:

- Insignalen $u_1 + u_2$ ger utsignalen $y_1 + y_2$
- Insignalen cu ger utsignalen cy

Exempel:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad g(t) = e^{-t}$$

PI-återkoppling

Transformering av integraler: Påstående

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}X(s)$$

Intuitivt resonemang: Beteckna integralens värde vid tidpunkten t med $h(t)$, d v s

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)d\tau \ \ = x(t)$$

Med räkneregeln för transformering av derivator fås

$$sH(s) = X(s)$$

vilket ger det resultatet

$$H(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

Alternativt: Partialintegration

Exempel: PI-återkoppling

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau$$

Transformering ger

$$U(s) = K_p E(s) + K_I \frac{1}{s}E(s) = (K_p + K_I\frac{1}{s})E(s)$$

Inför beteckningen $F(s)$ för Laplacetransformen av sambandet mellan $e(t)$ och $u(t)$, d v s i detta fall

$$F(s) = K_P + K_I\frac{1}{s}$$

Exempel: Temperaturreglering ($k = 1$)

System:

$$T\dot{y} + y = u + v$$

Laplace ger

$$Y(s) = G(s)(U(s) + V(s))$$

där

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

PI-återkoppling:

$$U(s) = (K_p + K_I \frac{1}{s})E(s)$$

Allmänt:

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

Blockschema (se också avsnitt 2.7):

Verkan av ett block motsvarar multiplikation med en Laplacetransform

$$Y(s) = G(s)(V(s) + F(s)(R(s) - Y(s)))$$

vilket ger

$$Y(s)(1 + G(s)F(s)) = F(s)G(s)R(s) + G(s)V(s)$$

d v s

$$Y(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}V(s) = G_C(s)R(s) + G(s)S(s)V(s)$$

där

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \quad S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

där $G_C(s)$ kallas det återkopplade systemets överföringsfunktion och $S(s)$ kallas känslighetsfunktion.

Invers Laplace ger differentialekvationen för sambandet mellan $r(t), v(t)$ och $y(t)$.

Egenskaperna hos $y(t)$ kan ofta bedömas direkt med hjälp av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

- Polerna hos $G_c(s)$ bestämmer utsignalens "utseende".
- Om $y(t)$ har ett gränsvärde kan det bestämmas med regeln

  $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

  "Bevis":

  $$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st}\dot{y}(t)dt = \int_0^\infty \dot{y}(t)dt = \lim_{t\to\infty} y(t) - y(0)$$

Exempel:

$$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$$

och

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}$$

ger

$$G_C(s) = \frac{K_P s + K_I}{Ts^2 + (1 + K_P)s + K_I}$$

Detta motsvarar diff.ekvationen

$$T\ddot{y}(t) + (1 + K_P)\dot{y}(t) + K_I y(t) = K_P \dot{r}(t) + K_I r(t)$$

Karakteristisk ekvation:

$$Ts^2 + (1 + K_P)s + K_I = 0$$

som har lösningarna

$$s = -\frac{1 + K_P}{2T} \pm \sqrt{\frac{(1 + K_P)^2}{4T^2} - \frac{K_I}{T}}$$

Båda polerna har negativ realdel, d v s $y_h(t) \to 0$.

Stort K_I ger komplexa poler, d v s oscillativt förlopp.

Vilket värde går $y(t)$ mot?

T.ex $r(t) = 20, v(t) = -10$ ger

$$R(s) = \frac{20}{s} \qquad V(s) = -\frac{10}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{20}{s} - \lim_{s\to 0} \frac{sG(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{10}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{sK_P + K_I}{Ts^2 + (1+K_P)s + K_I} \cdot 20 - \lim_{s\to 0} \frac{s}{Ts^2 + (1+K_P)s + K_I} \cdot 10 = 20 - 0 = 20$$

Alltså:

- I-återkopplingen medför att $y(t) \to r(t)$, d v s $e(t) \to 0$.
- Alltför kraftig I-återkoppling medför oscillativt system.

P-reglering: Utnyttjar felets storlek i samma tidpunkt

I-reglering: Utnyttjar felets storlek vid tidigare tidpunkter, d v s använder "gammal" information.

PID-återkoppling

Förbättring: Vid bestämningen av $u(t)$ tag även hänsyn till om e(t) minskar eller ökar $\Rightarrow$ deriverande återkoppling

PID:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Laplace ger

$$U(s) = (K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s) E(s)$$

Exempel: Robotarm

Momentekvation:

$$J\ddot{y}(t) = u(t)$$

där y - vinkel, u - moment och J - tröghetsmoment.

Laplace ger

$$Y(s) = \frac{1}{Js^2}U(s)$$

PD-återkoppling

$$U(s) = (K_P + K_D s)E(s)$$

ger

$$G_C(s) = \frac{K_P + K_D s}{Js^2 + K_D s + K_P}$$

Karakteristisk ekvation

$$s^2 + \frac{K_D}{J}s + \frac{K_P}{J} = 0$$

D-delen är nödvändig för att armen ska ställa in sig. $K_D = 0$ ger kar.ekv.

$$s^2 + \frac{K_P}{J} = 0$$

vilket ger

$$s = \pm i\sqrt{\frac{K_P}{J}}$$

d v s poler på imaginäraxeln. $y(t)$ kommer att oscillera med konstant amplitud.

Tidsdiskret PID-reglering

Bakgrund: De allra flesta regulatorer implementeras i form av ett program i en dator.

Ur datorns synvinkel: Datorn tar emot värdena

$$y(kT_s), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

och

$$r(kT_s), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

och beräknar, utgående från dessa, styrsignalvärden

$$u(kT_s), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

där T_s är samplingsintervallet (tidsavståndet mellan två mätningar).

Inför:

$$u_k = u(kT_s) \quad y_k = y(kT_s) \quad r_k = r(kT_s) \quad e_k = e(kT_s)$$

Tidskontinuerlig PID-regulator:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Integralen approximeras med en summa ($t = kT_s$)

$$\int_0^{kT_s} e(\tau) d\tau \approx T_s(e_1 + \cdots + e_k)) = T_s \sum_{l=1}^{k} e_l$$

Derivatan approximeras med en s k differentkvot

$$\dot{e}(kT_s) \approx \frac{1}{T_s}(e_k - e_{k-1})$$

Tidsdiskret PID-regulator:

$$u_u = K_p e_k + \frac{K_I}{T_s} \sum_{l=1}^{k} e_l + \frac{K_D}{T_s}(e_k - e_{k-1})$$