1

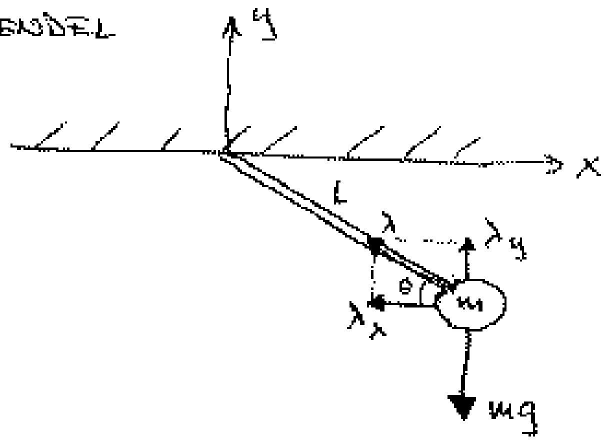
INDEX FÖR EN DIFFERENTIAL-ALGEBRAISK EKVATION

EN DIFFERENTIAL-ALGEBRAISK EKVATION (DAE) KAN SKRIVAS PÅ FORMEN

$$F(\dot{x}, x, t) = 0 \qquad (1)$$

DESSA ÄR VANLIGT FÖREKOMMANDE INOM OMRÅDENA KEMITEKNIK OCH MEKANIK.

EXEMPEL: PENDEL



VI FÅR:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda_x = -\lambda\cos\theta = -\lambda\frac{x}{L} \\ m\ddot{y} = \lambda_y - mg = \lambda\sin\theta - mg = -\lambda\frac{y}{L} - mg \\ x^2 + y^2 = L^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + \frac{\lambda x}{L} = 0 & (2a) \\ m\ddot{y} + \frac{\lambda y}{L} + mg = 0 & (2b) \\ x^2 + y^2 - L^2 = 0 & (2c) \end{cases}$$

(2) EN DAES INDEX DEFINIERAS SOM DET MINSTA ANTAL GÅNGER SOM (1) (ELLER: DELAR AV (1)) MÅSTE DERIVERAS FÖR ATT $\dot{x}$ SKALL KUNNA UTTRYCKAS SOM EN KONTINUERLIG FUNKTION AV X och t, DVS

$$\dot{x} = \varphi(x,t)$$

DETTA BETYDER ATT EXEMPELVIS EN VANLIG ODE

$$\dot{x} = f(t,x)$$

HAR INDEX 0, OCH ATT SYSTEMET

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ 0 &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

HAR INDEX 1 OM g_y ÄR ICKE-SINGULÄR.

OM INDEX ÄR STÖRRE ÄN ELLER LIKA MED 2, SÅ SÄGER MAN ATT DAE:n HAR HÖGRE INDEX.

(3) ANLEDNINGEN TILL DENNA DISTINKTION ÄR ATT DAEer MED HÖGRE INDEX ÄR BETYDLIGT SVÅRARE ATT SIMULERA.

→ STATUS I DAGSLÄGET:

INDEX	LÖSBARHET
0, 1	INGA PROBLEM
2, 3	FINNS LÖSARE SOM KLARAR VISSA PROBLEM, INGEN (?) KLARAR DOCK ALLA.
≥ 4	ALLA LÖSARE FÅR ALLVARLIGA PROBLEM

MER INFORMATION OM LÖSNINGAR AV DAEer FÅS AV JONAS E ELLER GENOM ATT LÄSA [1].

LINJÄRA TIDSINVARIANTA SYSTEM

LTI DAEer KAN SKRIVAS PÅ FORMEN

$$E\dot{x}(t) + Fx(t) = f(t) \qquad (3)$$

FÖR ATT DENNA SKALL VARA LÖSBAR SÅ MÅSTE $\lambda E + F$ VARA INVERTERBAR FÖR NÅGOT λ. OM DETTA GÄLLER SÅ EXISTERAR P OCH Q (BÅDA INVERTERBARA) SÅDANA ATT

$$PFQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad PEQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

DÄR N ÄR NILPOTENT, DVS $N^{\nu} = 0$ $N^{\nu-1} \neq 0$ FÖR NGT ν.

MULTIPLICERA (3) FRÅN VÄNSTER OCH INFÖR $x = Qy$, $Pf(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = Cy_1 + f_1 \\ N\dot{y}_2 = y_2 + f_2 \end{cases} \qquad (4)$$

MED LÖSNING $y_2(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} (-N)^i \frac{d^i f(t)}{dt^i}$

⑤ ALTERNATIVT KAN E RADREDUCERAS TILL

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

DERIVERING AV SISTA RADEN GER

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

OM $\begin{bmatrix} E_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ ÄR INVERTERBAR SÅ ÄR VI KLARA ANNARS UPPREPAS FÖRFARANDET (5 - 6).

DET GÄLLER ATT

ν = ANTAL STEG I ALGORITHEN (EKV. 5&6)

ν = 1 + ORDNING AV $\lambda = 0$ SOM POL TILL $(E + \lambda F)^{-1}$

ν = 1 + ANTAL DERIVATOR AV f I LÖSNINGEN TILL DAEn.

FÖR LINJÄRA TIDSVARIABLA DAEer MED INDEX = 1 GÄLLER MOTSVARANDE, DOCK EJ FÖR HÖGRE INDEX! SE [2].

6

INDEXREDUKTION

PENDELN (2) HAR INDEX=3 I

FÖR ATT SE DETTA DERIVERAS (2a) EN GÅNG:

$$m x^{(3)} + \frac{\dot{\lambda} x}{L} + \frac{\lambda \dot{x}}{L} = 0 \qquad (2a')$$

DERIVERING AV (2c) 3 GÅNGER GER

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \qquad (2c')$$

$$2x\ddot{x} + 2\dot{x}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 = 0 \qquad (2c'')$$

$$6\dot{x}\ddot{x} + 2x x^{(3)} + 6\dot{y}\ddot{y} + 2y y^{(3)} = 0 \qquad (2c''')$$

MHA (2a'), (2b'), (2c''') OCH (2c'') KAN

$\dot{\lambda}$ UTTRYCKAS I $x, \dot{x}, y, \dot{y}, \lambda$.

OM VI ISTÄLLET BYTER UT (2c) MOT (2c'') SÅ INSES ATT SYSTEM

$$\begin{cases} m\ddot{x} - \frac{\lambda x}{L} = 0 & (2a) \\ m\ddot{y} - \frac{\lambda y}{L} - mg = 0 & (2b) \\ 2x\ddot{x} + 2\dot{x}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{y}^2 = 0 & (2c'') \end{cases}$$

HAR INDEX $\underline{1}$, DVS VI HAR REDUCERAT INDEXET VILKET ÄR BRA VID SIMULERING.

NOTERA DOCK ATT SIMULERINGEN MÅSTE UPPFYLLA DE INITIAL-VILLKOR SOM GES AV (2c), (2c'), (2c''). SE ÄVEN [3]

7

[1] E. Hairer och G. Wanner
Solving Ordinary Differential Equations II,
Stiff and Differential Algebraic Problems
Springer-Verlag, 1991

[2] Paul M. Frank (Editor)
Advances in Control (Highlights of ECC'99)
Kapitel 9: Nonlinear Descriptor Systems
S.L. Campbell, R. Nikoukhah,
F. Delebecque
sid 247-282
Springer 1999

[3] A new technique for solving high-index differential-algebraic equations using dummy derivatives.
IEEE Symposium on Computer-Aided Control Design, 1992
sid 218-224