Semifysikalisk modellering

i kursen Modellering

Måns Östring

Control & Communication, ISY

Innehåll

- Orientering med miniexempel
- Större exempel: Soluppvärmt hus
- Tekniska detaljer, svårigheter
- Referenser

Dina anteckningar:

Modeller

Modellstruktur

$$y(t) = g(t, \theta, \varphi(t))$$

Ofta vill man ha linjär modellstruktur eftersom det är enkelt att skatta parameterarna i en sådan.

$$g = \sum_i \theta_i \varphi_i(t) = \theta^T \varphi(t)$$

θ parametrar som ska estimeras.

$\varphi(t)$ känd kvantitet, typiskt in- och utsignaler.

Modellstrukturtyper

- Black-box
- Fysikaliskt parameteriserade (White-box)
- Grey-box
  - Semifysikaliska modeller

Black-box: Typiskt sätter man ordningstalen för täljare och nämnare i en linjär modell.

White-box: Helt fysikaliskt bestämd.

Grey-box: Delvis fysikaliskt bestämd, men det behövs indetifieringsmetoder för att skatta vissa delar/parametrar.

Ex: Semifysikalisk modellering; element i ett rum

Vi vill bygga en modell för hur spänningen till elementet påverkar temperaturen i rummet.

- ARX för enkel (ger ej bra resultat).
- Att bygga en fysikalisk modell är för krånglig.
- Man kan misstänka att det är bättre att ha effekten som insignal?

$\Rightarrow$ Kvadrera spänningen och använd denna som insignal till modellen.

Genom en intuitiv transformering av insignalen har vi större chans att kunna beskriva systemet med en linjär modell.

$$P = UI$$
$$U = RI$$
$$P = U^2/R$$

Identifieringsgång

- ”Simple things first”, enkla linjära modeller tex ARX.
- Vad vet du om systemet? Kan du göra någon enklare transformation av tex in- utsignalerna?
- Olinjära modellstrukturer, tex Neurala nätverk.

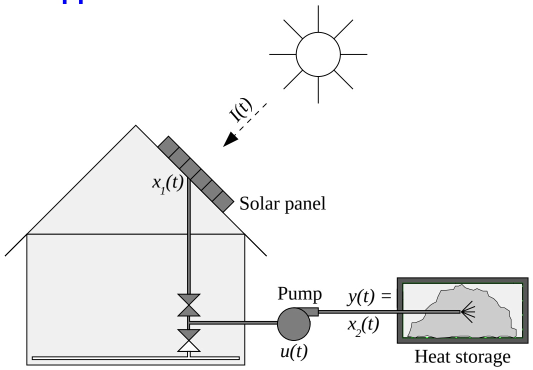
Semifysikalisk modellering

- Använd bara **fundamentala fysikaliska principer** som tex energiprincipen.
- Om dom ursprungliga parametrarna uppträder på ett komplicerat olinjärt sätt — **inför nya parametrar** som uppträder linjärt.
- Välj ut dom **viktigaste regressorerna** och inkludera endast dom i modellen.

Det kan även vara så att man vet att det finns en integration i systemet så varför inte använda den kunskapen.

Dock kan man fråga sig om detta är enkelt. Vad är det för problem man kan stöta på?

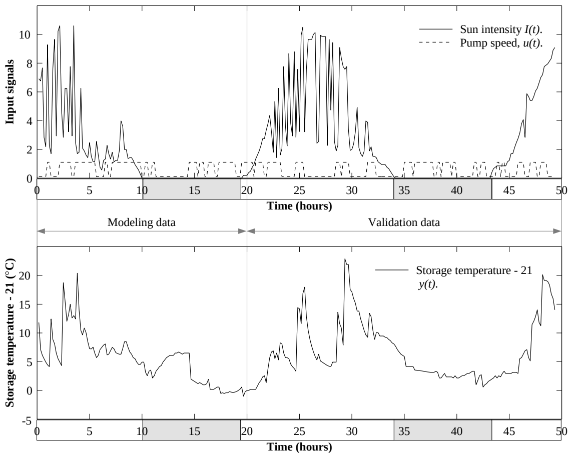
Soluppvärmt hus



Mätsignaler:
1) $I(t)$ solstrålningen. (icke styrbar insignal)
2) $u(t)$ pumphastigheten (styrbar men bara två lägen; av eller på)
3) $y(t)$ inloppstemperaturen (utsignal)

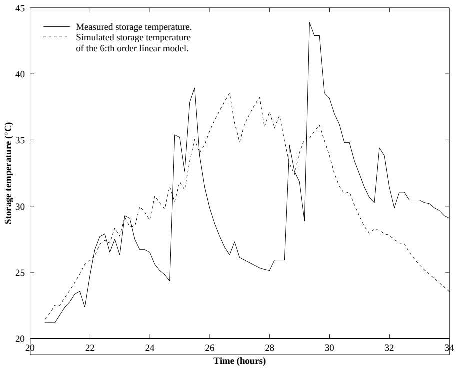
Målet är att modellera inloppstemperaturn till förvaringsplatsen och hur den påverkas av pumphastigheten och solstrålningen. Mätningar görs var 20 minut under totalt 48 timmar. 20 första timmarna används till modellbygge och resterande till validering av modellen.

Signalerna



”Try simple things first”

$$y(t) = -\theta_1 y(t-1) - \theta_2 y(t-2) + \theta_3 u(t-1) + \theta_4 u(t-2) + \theta_5 I(t-1) + \theta_6 I(t-2)$$



En-stegsprediktion med en modellstruktur men 6 fria parametrar. Dom skattade paramerarna fås från

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \underbrace{\sum_t (y(t) - \hat{y}(t,\theta))^2}_{V(\theta)}$$

Gick ju inte så bra. Simulering följer verkligheten. Den den övergripande formen är dock fångad av modellen.

”try simple physical things next”

Solstrålningen och pumphastigheten är ju knappast additiva: Om pumpen är avstängd påverkar solstrålningen inte inloppstemperaturen.

Vi kan förvänta oss ett multiplikativt uppförande mellan de bägge insignalerna.

Vi tittar på energiprincipen för solfångaren och gör en väldigt grovt approximativ modell.

Låt medeltemeraturen hos solfångaren vara $x_1(t)$

$$x_1(t+1) - x_1(t) = \theta_1 I(t) - \theta_2 x_1(t) - \theta_3 x_1(t) u(t)$$

Förenklat:

Uppvärming av solfångaren $x_1(t+1) - x_1(t)$ påverkas av strålningen prop. mot $I(t)$ och förlust till omgivningen prop. mot $x_1(t)$ och förlust till föváringsplatsen prop. mot $x_1(t)u(t)$.

Vi tittar på energiprincipen för förvaringsplatsen:

$$y(t+1) - y(t) = \theta_3 x_1(t)u(t) - \theta_4 y(t)$$

Vi eliminerar x_1 i ekvationerna och får

$$\begin{aligned} y(t) = (1-\theta_4)y(t-1) + \theta_1\theta_3 u(t-1)I(t-2) - \theta_3 u(t-1)y(t-1) \\ +\theta_3(1-\theta_4)u(t-1)y(t-2) + (1-\theta_2)\frac{u(t-1)y(t-1)}{u(t-2)} \\ -(1-\theta_2)(1-\theta_4)\frac{u(t-1)y(t-2)}{u(t-2)} \end{aligned}$$

Uppvärming av förvaringsplatsen $y(t+1) - y(t)$ påverkas av energi in till förvaringsplatsen prop. mot. $x_1(t)u(t)$ och förlust till omgivningen prop. mot $y(t)$

Eftersom vi inte mäter x_1 måste vi elimnera den ur ekvationerna.

Omparameterisera!

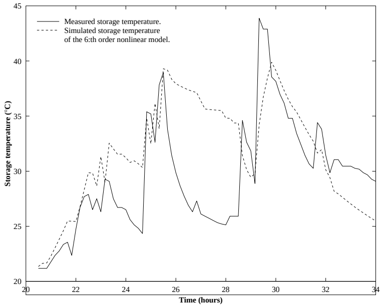
$$\begin{aligned} &\theta_1^* = (1-\theta_4) && \varphi_1(t) = y(t-1) \\ &\theta_2^* = \theta_1\theta_3 && \varphi_2(t) = u(t-1)I(t-2) \\ &\theta_3^* = -\theta_3 && \varphi_3(t) = u(t-1)y(t-1) \\ &\theta_4^* = \theta_3(1-\theta_4) && \varphi_4(t) = u(t-1)y(t-2) \\ &\theta_5^* = (1-\theta_2) && \varphi_5(t) = u(t-1)y(t-1)/u(t-2) \\ &\theta_6^* = -(1-\theta_2)(1-\theta_4) && \varphi_6(t) = u(t-1)y(t-2)/u(t-2) \end{aligned}$$

Nu kan vi skriva det som linjär regression

$$y(t) = \sum_{i=1}^{6} \theta_i^* \varphi_i(t)$$

och vi kan göra estimeringen av parametrarna med minsta-kvadrat-metoden.

Nackdel: 2 fler parametrar

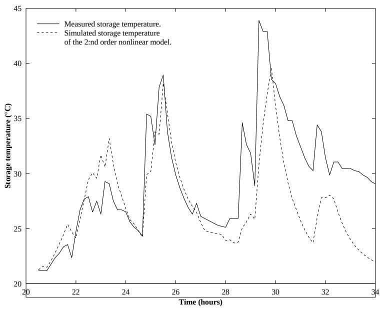


Bättre men inte tillräckligt. Det kan finnas risk för övermodellering. (Anpassning av modellen till det aktuella bruset).

På grund av att vi fick en extra flexibel model finns risk för övermodellering. Vi har ju ingen separat brusmodell.

Väljer 2 av regressorerna:

$$y(t) = \theta_1^* y(t-1) + \theta_2^* u(t-1) I(t-2)$$



Nu har vi verkligen gjort modellen semifysikalisk eftersom vi inte tog med alla regressorerna. Det går även att gå vidare med dessa regressorer och tex. tillämpa neurala nätverk med dess 2 regressorer.

Svårigheter

1. Finna ett dynamiskt samband mellan in och utsignaler.
2. Givet ett dynamiskt samband, hitta en ny mängd ekvationer som inte innehåller icke mätbara storheter $x(t)$.
3. Om sambandet är kontinuerligt transformera till diskret motsvarighet.
4. Skriv om ekvationerna så att dom blir linjära i parametrarna.
5. Välja ut dom viktigaste regressorerna.
6. Estimera en bra modell från data.

Punkt 1 antar vi att vi redan har. Punkt 3 kan hanteras med flertal olika metoder, tex euler. Punkt 6, hänvisar jag till identifieringskursen.

Punkt 2,4 och 5 kommer att behandlas här.

Punkt 2: Givet ett dynamiskt samband, hitta en ny mängd ekvationer som inte innehåller icke mätbara storheter $x(t)$.

Om ADE:
Ritts algorithm (liknar Gausselimination)
Eller ”commutative algebra” som hanterar polynomiska differentialekvationer. Här kommer Gröbnerbaser in.
Dock är detta mycket beräkningsskrävande, tex kan 5 ekvationer ta flera timmar att lösa.

Gröbnerbaser är till för att hantera:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2^2 x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 x_3 - 1 &= 0 \\ x_2 + x_2 x_3 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

eliminera x_1 och x_2

ADE = Algebraisk differentialekvation

Gröbnerbaser

Antag att vi har polynomen

$$\mathcal{F} = \{x_1 - 2x_2^2 x_3, x_1 - 2x_2 x_3 - 1, x_2 + x_2 x_3 - 2\}$$

Då blir, med avseende på en viss ordning, Gröbnerbasen till $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathrm{GB} = \{5x_1 + 10x_3^2 - 16x_3 - 1, 5x_2 + 20x_3^2 - 7x_3 \\ +8, 10x_3^3 - 6x_3^2 + 8x_3 - 1\} \end{aligned}$$

Vi har eliminerat dom önskade variablerna i sista elementet i Gröbnerbasen.

Hur gör man om sin ODE till ADE?

Ex: Svängande pendel, med massa m, längd l och friktion k.

$$\ddot{\phi}(t) = -\frac{k}{m}\dot{\phi}(t) - \frac{g}{l}\sin(\phi)$$

Lösningen till denna ekvation uppfyller ADEn

$$\begin{aligned} \phi^{(3)}(\phi^{(3)} + \frac{2k}{m}\ddot{\phi}) + \ddot{\phi}^2(\dot{\phi}^2 + \frac{k^2}{m^2}) \\ + \frac{2k}{m}\ddot{\phi}\dot{\phi}^3 + \dot{\phi}^2(\frac{k^2}{m^2}\dot{\phi}^2 - \frac{g^2}{l^2}) = 0 \end{aligned}$$

ODE = ordinär differentialekvation

Det kan bli problem med falska lösningar. Dock är inte det så allvarligt eftersom vi sedan utför identifiering av parametrarna och då försvinner förhoppningsvis dom falska lösningarna.

Hur gör man om sin ODE till ADE?

Om man tex har $e^{x(t)}$ kan vi döpa den till $z_1(t)$. Om vi deriverar och utnyttjar att $z_1(t) = e^{x(t)}$ får vi följande

$$\dot{z}_1(t) = \dot{x}(t) z_1(t)$$

Kedjeregeln gör att detta kan tillämpas succesivt. Man kan göra detta för dom flesta typer av vanliga elementära funktioner.

Det finns tabeller där man kan slå upp ADEn för olika funktioner.

Punkt 4: Skriv om ekvationerna så att dom blir linjära i parametrarna.

Problem:

$$y(t) = \frac{-y(t-1) + u(t)}{\theta_1 - y(t-2)}$$

Går ej att skriva om på formen $y(t) = \sum \theta_i \varphi_i(t)$

Problem med att lösa ut $y(t)$, eller inte unikt.

Detta kan hanteras med formen

$$\sum \theta_i \varphi(t) = 0$$

Punkt 5: Välja ut dom viktigaste regressorerna.

”backward elimination”
— Börja med alla regressorerna och ta bort den som ökade förlustfunktionen minst.

”forward selection”
— Lägg till en regressor i taget.

”stepwise regression”
— Tag varannan av ”forward selection” och ”backward elimination”.

mm (”principal component regression”, ”partial least squares” ...)

För jobbigt att testa alla möjliga modeller 20 regressorer $\longrightarrow$ 137 979 modeller!

”backward elimination”: Här blir värsta fallet för 20 regressorer $\longrightarrow$ 209 modeller. Om illa konditionerat kan man göra ett dåligt val av regressorer. ”forward selection” är inte lika känslig för detta.

”forward selection”: Dock kan man göra ett dåligt val om det är stor korrelation mellan regressorer.

Existerande verktyg

- IdKit från KTH som är en del av MoCaVa.
- SEMI gjort av P. Lindskog.
- Mathematica eller Maple och SITB (Matlabtoolbox).

Referenser

[1] C. Halfmann, O. Nelles, and H. Holzmann. Semi-physical modeling of the veritcal vehicle dynamics. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1999.

[2] Peter Lindskog. *Methods, Algorithms and Tools for System Identification Based on Prior Knowledge*. PhD thesis, Linköping University, May 1996.

[3] Peter Lindskog and Lennart Ljung. Tools for semiphysical modelling. Technical Report LiTH-ISY-R-1820, Dept of EE. Linköping University, S-581 83 Linköping, Sweden, Jan 1996.

[4] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J. USA, 2:nd edition, 1999.

[5] J. Pettersson, P-O Gutman, T. Bohlin, and B. Nilsson. A grey box bending stiffness model for paper board manufacturing. In *Preceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications*, 1997.

[6] James Sörlie. *On Grey-Box Model Definition and Symbolic Derivation of Extended Kalman Filters*. PhD thesis, KTH, 1996.

[**?**], se ”Part III” för en utförlig beskrivning.

[**?**], för en 15 sidor lång artikel som bl.a. inkluderar solfångarexemplet.

[**?**], för mer information om identifieringsbiten.

[**?**], för info om MoCaVa, men mer också på seminariet nästa vecka.

Exempel där semi-fysikalisk modellering är använt finns i [**?**, **?**]